이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2026 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2026 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통(수학1+수학2) 〉

공통 14 : 삼각비의 정의, 피타고라스의 정의, 코사인법칙, 사인법칙을 모두 사용해야 하는 문제. ‘한 각을 공유하는 두 개의 삼각형’ 에 대한 실전 개념을 적용할 수 있는지를 평가함.

공통 15 : 정적분으로 주어진 함수의 미분가능성, 합/차로 만들어진 함수, 이차방정식의 근의 분리(대칭축/경계값/판별식)이 물리적으로 결합 된 매우 전형적인 문제. 이차방정식의 근의 분리는 매해 출제된다고 봐도 좋다.

공통 21 : 구간 별로 달리 정의된 함수의 그래프 개형과 연속성, 함수의 극한 계산에서 귀류법, 미분계수의 해석, 삼차함수의 그래프의 개형(곡선이 지나는 점/곡선 위의 점에서의 접선의 기울기)가 물리적으로 결합 된 문제. 크게 두 가지의 풀이가 가능한데.
[풀이1] 함수 $g(x)$의 그래프의 개형 만을 이용.
[풀이2] 두 함수 $g(x)$, $\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 그래프의 개형을 모두 이용.
아마도 전자의 풀이가 출제 의도일 듯.

공통 22 : 두 곡선의 위치 관계(평행이동/대칭이동/확대축소), 점의 이동/곡선의 이동(이 둘을 동시에 생각.)이 결합된 문제. ‘지수함수/로그함수를 포함한 두 곡선의 위치 관계를 파악할 때, 두 함수의 밑이 다르면 평행이동, 대칭이동 해도 일치하지 않으니 그래프의 개형에서 더 이상 의미있는 풀이가 힘들다.’ 라는 생각을 저격한 것으로 보임. 두 곡선의 위치 관계를 따질때에는 확대축소까지 생각해야 함.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 ‘교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구’ 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2012	모의평가(9월)	2011년 9월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2012	대학수학능력	2011년 11월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2014	예비시행(2009개정)	2012년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2013	모의평가(9월)	2012년 9월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2013	대학수학능력	2012년 11월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2014	대학수학능력	2013년 11월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2015	모의평가(6월)	2014년 6월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2015	대학수학능력	2014년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
6차 교육과정			2016	대학수학능력	2015년 11월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2009개정 교육과정		
2000	대학수학능력	1999년 11월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2017	대학수학능력	2016년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월	2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월	2018	대학수학능력	2017년 11월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월	2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2019	모의평가(9월)	2018년 9월
7차 교육과정			2019	대학수학능력	2018년 11월
2005	예비시행	2003년 12월	2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2020	대학수학능력	2019년 11월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2015개정 교육과정		
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2021	예시문항	2020년 5월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2006	대학수학능력	2005년 11월	2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2021	대학수학능력	2020년 11월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2007	대학수학능력	2006년 11월	2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월	2022	대학수학능력	2021년 11월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월	2023	모의평가(6월)	2022년 6월
2008	대학수학능력	2007년 11월	2023	모의평가(9월)	2022년 9월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월	2023	대학수학능력	2022년 11월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월	2024	모의평가(6월)	2023년 6월
2009	대학수학능력	2008년 11월	2024	모의평가(9월)	2023년 9월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월	2024	대학수학능력	2023년 11월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월	2025	모의평가(6월)	2024년 6월
2010	대학수학능력	2009년 11월	2025	모의평가(9월)	2024년 9월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월	2025	대학수학능력	2024년 11월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월	2028	예시문항(2022개정)	2025년 4월
2011	대학수학능력	2010년 11월	2026	모의평가(6월)	2025년 6월
2007개정 교육과정			2026	모의평가(9월)	2025년 9월
2012	모의평가(6월)	2011년 6월	2026	대학수학능력	2025년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며, 출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 수준
○○ : 교과서 연습문제 수준
○○○ : 비킬러(중에서 난이도 상)
●●● : 준킬러 (실전개념 필요성 비교적 높음)
★★★ : 킬러 (실전개념 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

▸ 문제집 본문에서 '문제 풀이에 직접적으로 도움이 되는 주제명'은 빈 상자로 두었습니다.

A. 지수함수의 그래프

주제:

빈 상자로 처리된 주제명은 각 단원의 시작 페이지의 맨 아래에 적어두었습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념'과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론'과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 출제 의도에 가장 가깝고, 빠른 풀이입니다.
<u>**따라서 [풀이] 또는 [풀이1]만을 읽어도 학습에 아무런 지장이 없습니다.**</u>

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

목 차

수학 I

1. 지수함수와 로그함수 8
2. 삼각함수 55
3. 수열 80
4. 지수함수와 로그함수 (개념) 136
5. 삼각함수 (개념) 197
6. 수열 (개념) 223

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 I	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 II	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A. 로그함수의 그래프: 직선

▸ 실전 개념 p.165

A088

○○○
(2006(6)−나형12)

두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ -m)$을 지나는 직선이 두 곡선 $y=2\log x$, $y=3\log x$와 각각 두 점에서 만날 때, $(1,\ 0)$이 아닌 교점을 각각 $(p,\ 2\log p)$, $(q,\ 3\log q)$라 하자.
〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $m>0$, $p>1$, $q>1$ 이다.) [4점]

ㄱ. $p>q$
ㄴ. $m=\dfrac{3\log q-2\log p}{q-p}$
ㄷ. $m>\dfrac{3\log q}{q}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A089

○○○
(2008−가형16/나형16)

직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x_1>y_2$
ㄴ. $x_2-x_1=y_1-y_2$
ㄷ. $x_1y_1>x_2y_2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A. 로그함수의 그래프

주제:

▸ 실전 개념 p.169

A090

○○○
(2009−나형11)

$0<a<\dfrac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 $(p,\ p)$, 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 $(q,\ q)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $p=\dfrac{1}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{4}$이다.
ㄴ. $p<q$
ㄷ. $a^{p+q}=\dfrac{pq}{2^q}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A091

●●● (2010-가형16/나형16)

자연수 n ($n \geq 2$)에 대하여 직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=|\log_2 x|$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 a_n, b_n ($a_n < b_n$)이라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_2 < \frac{1}{4}$

ㄴ. $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

ㄷ. $1 - \frac{\log_2 n}{n} < \frac{b_n}{n} < 1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A092

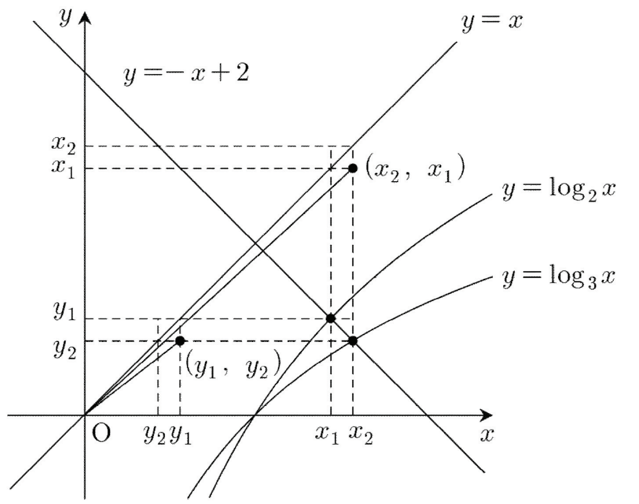
★★★ (2026(9)-확률과통계22/미적분22/기하22)

곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다.
점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P라 하고,
점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때,
네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) (직선 AP의 y절편)$-$(직선 BQ의 y절편)$=\frac{13}{2}$

(나) 직선 AB의 기울기는 $\frac{6}{7}$이다.

사각형 APQB의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



위의 그림에서 두 점 $(0,\ 0)$, $(x_2,\ x_1)$을 잇는 직선의 기울기가 두 점 $(0,\ 0)$, $(y_1,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기보다 크다. 이를 수식으로 표현하면

$\dfrac{x_1}{x_2} > \dfrac{y_2}{y_1}$

양변에 양수 x_2y_1을 곱하면

$\therefore\ x_1y_1 > x_2y_2$

[참고3]

▸ ㄷ. (참)

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보여도 좋다.

보기 ㄴ에 의하여

$x_2-x_1=y_1-y_2=k$(단, k는 양의 상수)

로 둘 수 있다.

$\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{x_1y_1-x_2y_2}{x_2y_1}$

$=\dfrac{x_1y_1-(x_1+k)(y_1-k)}{x_2y_1}$

$=\dfrac{k^2+(x_1-y_1)k}{x_2y_1}>0$

$(\because k>0,\ x_1>y_1,\ x_2y_1>0)$

이므로

$\dfrac{x_1}{x_2} > \dfrac{y_2}{y_1}$

양변에 양수 x_2y_1을 곱하면

$\therefore\ x_1y_1 > x_2y_2$

A090 | 답 ⑤

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

함수 $y=\log_a x$의 방정식과 직선 $y=x$의 방정식을 연립하면

$\log_a x = x$

이 방정식의 실근이 p이므로

$p=\log_a p$

$p=\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$\dfrac{1}{2}=\log_a \dfrac{1}{2}$

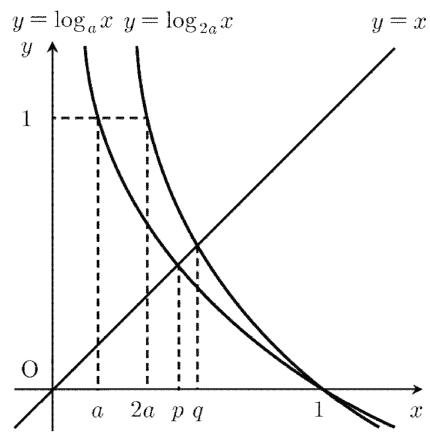
로그의 정의에서

$\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}$

양변을 제곱하면

$a=\dfrac{1}{4}$

▸ ㄴ. (참)



위의 그림에서

$p<q$

▸ ㄷ. (참)

함수 $y=\log_a x$의 방정식과 직선 $y=x$의 방정식을 연립하면

$\log_a x = x$

이 방정식의 실근이 p이므로

$p=\log_a p$

로그의 정의에서

$a^p=p$ $\cdots$ ㉠

함수 $y=\log_{2a} x$의 방정식과 직선 $y=x$의 방정식을 연립하면

$\log_{2a} x = x$

이 방정식의 실근이 q이므로

$q=\log_{2a} q$

로그의 정의에서

$(2a)^q=q$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 변변히 곱하면

$a^p(2a)^q = pq$

지수법칙에 의하여

$a^{p+q} \times 2^q = pq$

양변을 2^q으로 나누면

$a^{p+q} = \dfrac{pq}{2^q}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A091 | 답 ④

[풀이] ★

$0 < x \leq 1$일 때, $\log_2 x \leq 0$이므로

$|\log_2 x| = -\log_2 x$

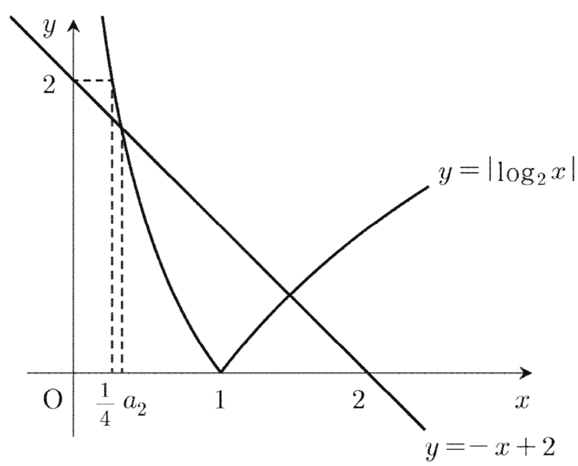
$x > 1$일 때, $\log_2 x > 0$이므로

$|\log_2 x| = \log_2 x$

문제에서 주어진 곡선의 방정식은

$y = \begin{cases} -\log_2 x & (0 < x \leq 1) \\ \log_2 x & (x > 1) \end{cases}$

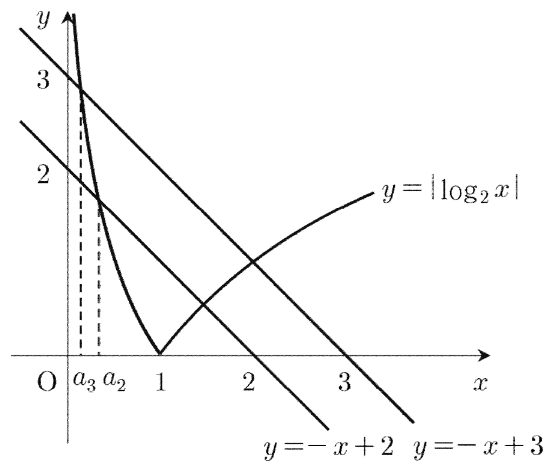
▸ ㄱ. (거짓)



위의 그림에서

$\dfrac{1}{4} < a_2 < 1$

▸ ㄴ. (참)



위의 그림에서

$0 < a_3 < a_2$

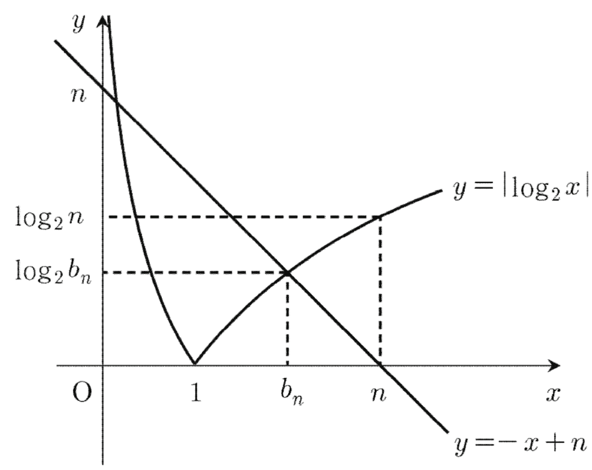
양변을 a_2로 나누면

$0 < \dfrac{a_3}{a_2} < 1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$0 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

▸ ㄷ. (참)



위의 그림에서

$b_n < n$

각 변을 n으로 나누면

$\dfrac{b_n}{n} < 1$ $\cdots$ ㉠

곡선 $y = \log_2 x$와 직선 $y = -x + n$의 교점의 x좌표가 b_n이므로

$-b_n + n = \log_2 b_n$ $\cdots$ ㉡

밑이 1보다 큰 로그함수 $y = \log_2 x$는 증가하므로

$\log_2 b_n < \log_2 n$ $\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에 의하여

$-b_n + n < \log_2 n$

각 변을 n으로 나누면

$$-\frac{b_n}{n}+1<\frac{\log_2 n}{n} \quad \cdots ㉣$$

㉠, ㉣에서

$$1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$$

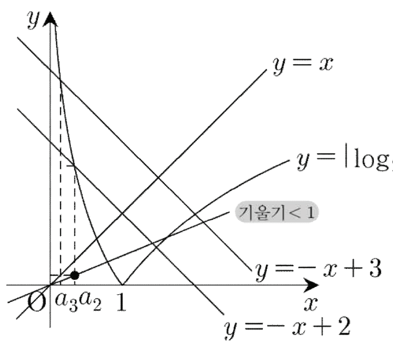
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

[참고1]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 보여도 좋다.

▸ ㄴ. (참)



위의 그림처럼

두 점 $(0,\ 0)$, $(a_2,\ a_3)$을 지나는 직선의 기울기는 양수이면서 1보다 작다.

$$0<\frac{a_3}{a_2}<1$$

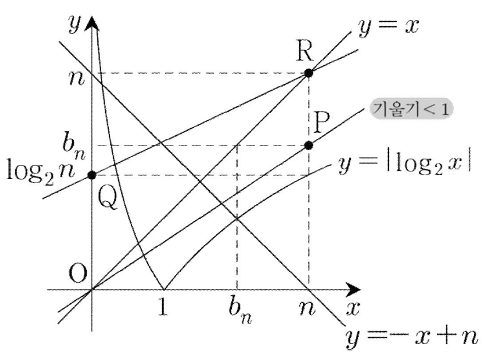
마찬가지 방법으로 3 이상의 자연수 n에 대하여 대하여

$$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$$

따라서 보기 ㄴ에서 주어진 명제는 참이다.

[참고2]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 확인해볼 수도 있다.



위의 그림에서

$P(n,\ b_n)$, $Q(0,\ \log_2 n)$, $R(n,\ n)$

이고,

(직선 QR의 기울기) < (직선 OP의 기울기)

< (직선 $y=x$의 기울기)

이므로

$$\therefore\ 1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$$

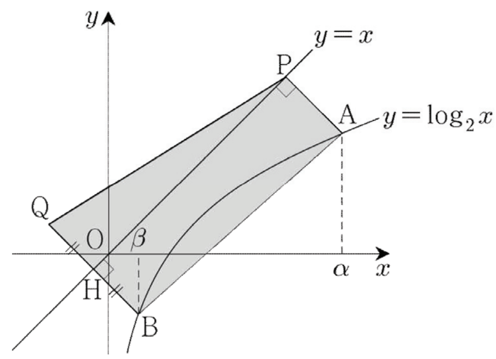
A092 | 답 73

[풀이]

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β,

두 직선 BQ, $y=x$의 교점을 H라고 하자.

이때, $\overline{PH}\perp\overline{BQ}$



두 직선 AP, BQ의 방정식을 각각

$y=-x+k_a$, $y=-x+k_b$

라고 하면 조건 (가)에 의하여

$$k_a-k_b=\frac{13}{2}$$

(나): $A(\alpha,\ -\alpha+k_a)$, $B(\beta,\ -\beta+k_b)$

이므로

(직선 AB의 기울기)

$$=\frac{(-\alpha+k_a)-(-\beta+k_b)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{(k_a-k_b)-(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\frac{13}{2}-(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{6}{7},\ \alpha-\beta=\frac{7}{2} \quad \cdots ㉠$$

한편

(점 A의 y좌표) $=-\alpha+k_a=\log_2\alpha$,

(점 B의 y좌표) $=-\beta+k_b=\log_2\beta$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$\beta-\alpha+k_a-k_b=\log_2\frac{\alpha}{\beta}$, 즉

$$-\frac{7}{2}+\frac{13}{2}=3=\log_2\frac{\alpha}{\beta},$$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=2^3=8,\ \alpha=8\beta$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\alpha=4,\ \beta=\dfrac{1}{2},\ \mathrm{A}(4,\ 2),\ \mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{2}{\sqrt{2}},\ \overline{\mathrm{BQ}}=2\overline{\mathrm{BH}}=2\times\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

그리고

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{k_a-k_b}{\sqrt{2}}=\frac{13}{2\sqrt{2}}$$

$$(\square\mathrm{APQB}\text{의 넓이})=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}\times\frac{13}{2\sqrt{2}}=\frac{65}{8}$$

$\therefore\ p+q=73$

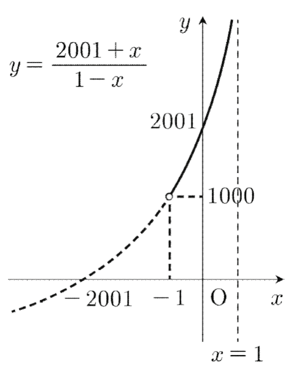
답 73

A093 | 답 ③

[풀이]

$\dfrac{2001+x}{1-x}=-1-\dfrac{2002}{x-1}$이므로

유리함수 $y=\dfrac{2001+x}{1-x}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{2002}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.



$-1<x<1$일 때, $\dfrac{2001+x}{1-x}>1000$

밑이 1보다 큰 로그함수 $y=\log x$는 증가하므로

$-1<x<1$일 때, $\log\dfrac{2001+x}{1-x}>\log 1000=3$

따라서 문제에서 주어진 함수의 치역은 $\{y\,|\,y>3\}$이다.

답 ③

A094 | 답 ③

[풀이]

$x^2-4x+31=(x-2)^2+27\geq 27$

(단, 등호는 $x=2$일 때 성립한다.)

$3+\log_3(x^2-4x+31)\geq 3+\log_3 27=6$

이므로 주어진 함수의 최솟값은 6이다.

답 ③

A095 | 답 ①

[풀이]

$S(x)=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}=(\log_2 x)\left(\log_4\dfrac{16}{x}\right)$

$=(\log_2 x)\left(2-\dfrac{1}{2}\log_2 x\right)$

이때, $\log_2 x=t(0<t<4)$로 두면

$S(x)=t\left(2-\dfrac{1}{2}t\right)=-\dfrac{1}{2}(t-2)^2+2$

함수 $S(x)$는 $t=2(x=4)$일 때 극댓값(최댓값) 2를 가진다.

즉, $a=4,\ M=2$

$\therefore\ a+M=4+2=6$

답 ①

A096 | 답 36

[풀이]

$2^x-2^{-x}=t$로 두자.

양변에 2^x을 곱하여 정리하면

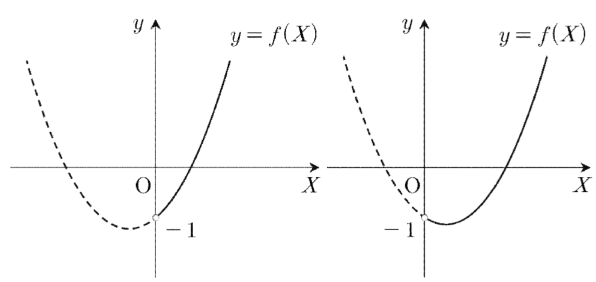
$2^{2x}-t\times 2^x-1=0$

$2^x=X(>0)$로 두면

$X^2-tX-1=0$ $\cdots(*)$

$f(X)=X^2-tX-1(X>0)$로 두면

함수 $f(X)$의 그래프는



곡선 $y=f(X)$는 X축과 오직 한 점에서 만나며

이 교점의 X좌표는 항상 양수이다.

따라서 방정식 (*)은 t의 값에 관계없이 항상 실근을 갖는다.

E. 삼차함수의 그래프: 인수정리

▸ 실전 개념 p.213

E072

★★★ (2018(9)−나형29)

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

E073

★★★ (2026−확률과통계21/미적분21/기하21)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<t)\\ f(x) & (x\geq t)\end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대하여
> $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.
>
> (나) $\displaystyle\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는
> 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\neq-\dfrac{7}{2}g(1)$) [4점]

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$$

$f'(0)=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$에서 $p=3,\ q=7$

$\therefore\ p+q=10$

답 10

E073

| 답 65

[풀이1]

함수 $g(x)$는 $x=t$에서 연속이므로

$\lim_{x\to t-} g(x)=g(t)$, 즉 $-f(t)=f(t)$

$\therefore\ f(t)=0$

(가):

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 극한값이 존재하므로

$g(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

($\because g(0)=0$이면 $-f(0)=0$ 또는 $f(0)=0$

이므로 $f(0)=0$)

$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 극한값이 존재하므로

$g(2)=2 \Leftrightarrow f(2)=0$

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=px(x-2)(x-\alpha)$ (단, $p>0$, α는 상수)

그런데 $f(t)=0$이므로

$t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=\alpha$

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}-px(x-2)(x-\alpha) & (x<t)\\ px(x-2)(x-\alpha) & (x\ge t)\end{cases}$$

(나):

$g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)$은 모두 자연수이므로

$g(-1)>0,\ g(1)<0$

$m=1$일 때,

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=-g(1)>0$

이므로 $m\neq 1$

$m=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}\times\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$=\frac{1}{2}\times$(함수 $g(x)$의 $x=2$에서의 우미분계수) $\cdots$(*)

의 부호는 아직 결정할 수 없다.

$m\ge 3$일 때,

$$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\frac{g(m)}{m(m-2)}$$

$m(m-2)>0$이므로 $g(m)<0$인

자연수 $m(\ge 3)$이 1개 또는 2개 있어야 한다.

전자는 (*)<0인 경우, 후자는 (*)>0인 경우이다.

다시 말하면

전자: $2\in\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$ $\cdots$(경우1)

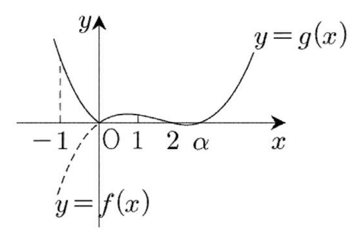
후자: $2\notin\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$ $\cdots$(경우2)

그런데 $\alpha\le 2$이면

$x\ge 2$일 때, $g(x)\ge 0$

이므로 $\alpha>2$이어야 한다.

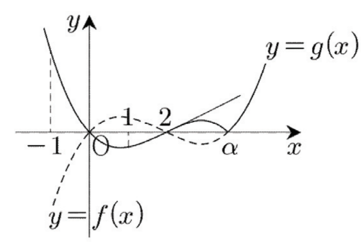
- $t=0$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는



$g(1)>0$이므로

$g(1)<0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

- $t=\alpha$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는



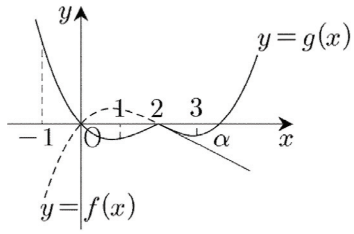
(*)>0이므로 $m\neq 2$, 즉

$2\notin\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

그런데 $m\ge 3$일 때, $g(m)\ge 0$이므로

(경우2)를 만족시키지 않는다.

• $t=2$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는



$g(-1)>0,\ g(1)<0,$

(함수 $g(x)$의 $x=2$에서의 우미분계수)<0

의 조건을 만족시킨다. 즉, (경우1)이다.

이때, $3<\alpha\leq 4$

$$\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}=\{2,\ 3\}$$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

$$g(-1)=2,\ -\frac{7}{2}g(1)=3 \qquad \cdots ㉠$$

$$g(-1)=3,\ -\frac{7}{2}g(1)=2 \qquad \cdots ㉡$$

㉠:

$g(-1)=3p(1+\alpha)=2,$

$$-\frac{7}{2}g(1)=-\frac{7}{2}p(1-\alpha)=3$$

연립방정식을 풀면

$\alpha=-8(<0)\ (\times)$

㉡:

$g(-1)=3p(1+\alpha)=3,$

$$-\frac{7}{2}g(1)=-\frac{7}{2}p(1-\alpha)=2$$

연립방정식을 풀면

$$\alpha=\frac{11}{3},\ p=\frac{3}{14},$$

$$f(x)=\frac{3}{14}x(x-2)\left(x-\frac{11}{3}\right)$$

$$\therefore\ g(-5)=-\frac{3}{14}(-5)(-7)\left(-\frac{26}{3}\right)$$

$=65$

답 65

[풀이2]

함수 $g(x)$는 $x=t$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to t-}g(x)=g(t)$, 즉 $-f(t)=f(t)$

$\therefore\ f(t)=0$

(가):

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 극한값이 존재하므로

$g(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

$(\because g(0)=0$이면 $-f(0)=0$ 또는 $f(0)=0$

이므로 $f(0)=0)$

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 극한값이 존재하므로

$g(2)=2 \Leftrightarrow f(2)=0$

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=px(x-2)(x-\alpha)$ (단, α는 상수)

그런데 $f(t)=0$이므로

$t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=\alpha$

(나):

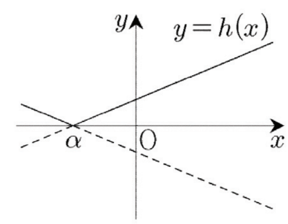
$$h(x)=\frac{g(x)}{x(x-2)}=\begin{cases}-p(x-\alpha) & (x<t)\\ p(x-\alpha) & (x\geq t)\end{cases}$$

로 두자.

$$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\lim_{x\to m+}h(x) \qquad \cdots(*)$$

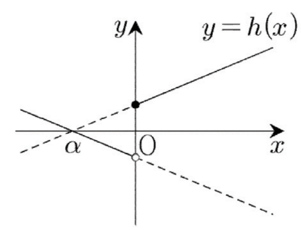
(1) $\alpha<0$인 경우

$t=\alpha$일 때,

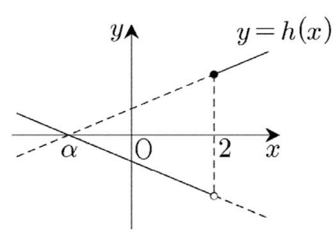


(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

$t=0$일 때,



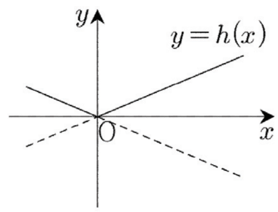
(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 1뿐이다.

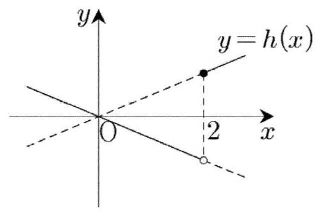
(2) $\alpha=0$인 경우

$t=0$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

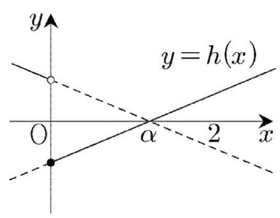
$t=2$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 1뿐이다.

(3) $0<\alpha<2$인 경우

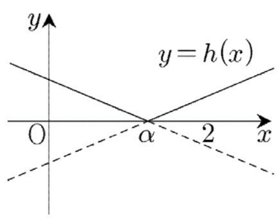
$t=0$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 없거나, 1뿐이다.

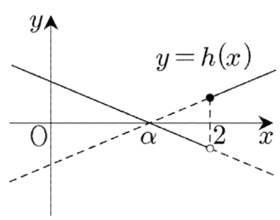
(전자: $0<\alpha\le 1$, 후자: $1<\alpha<2$)

$t=\alpha$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

$t=2$일 때,

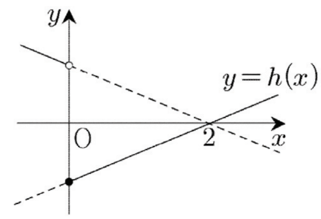


(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 없거나, 1뿐이다.

(전자: $1<\alpha<2$, 후자: $0<\alpha\le 1$)

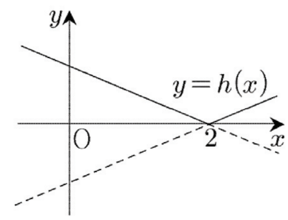
(4) $\alpha=2$인 경우

$t=0$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 1뿐이다.

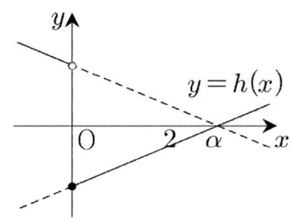
$t=\alpha$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(5) $\alpha>2$인 경우

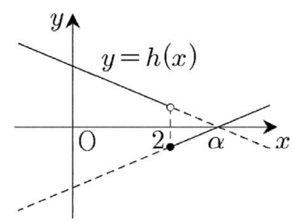
$t=0$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m의 개수는 2이다.

$\Leftrightarrow m=1,\ 2\ \&\ 2<\alpha\le 3$ $\cdots$(경우1)

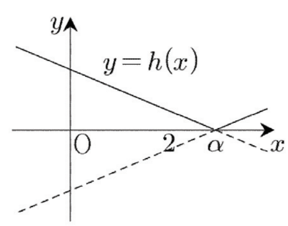
$t=2$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m의 개수는 2이다.

$\Leftrightarrow m=2,\ 3\ \&\ 3<\alpha\le 4$ $\cdots$(경우2)

$t=\alpha$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

이상에서 (경우1), (경우2)만을 따지면 된다.

한편 두 자연수 $g(-1)$, $-\dfrac{7}{2}g(1)$은 양수이므로

$g(-1)>0$, $g(1)<0$

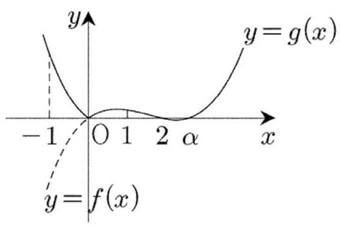
(경우1)

함수

$$g(x)=\begin{cases}-px(x-2)(x-\alpha) & (x<0)\\ px(x-2)(x-\alpha) & (x\geq 0)\end{cases}$$

(단, $2<\alpha\leq 3$)

의 그래프는



위의 그래프에서 $g(1)>0$이므로

$g(1)<0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

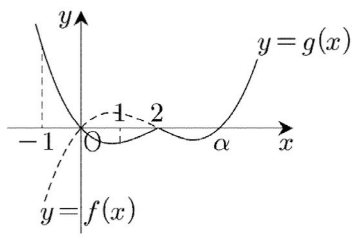
(경우2)

함수

$$g(x)=\begin{cases}-px(x-2)(x-\alpha) & (x<2)\\ px(x-2)(x-\alpha) & (x\geq 2)\end{cases}$$

(단, $3<\alpha\leq 4$)

의 그래프는



이 경우가 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다.

$$\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}=\{2,\ 3\}$$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

$$g(-1)=2,\ -\frac{7}{2}g(1)=3 \qquad \cdots ㉠$$

$$g(-1)=3,\ -\frac{7}{2}g(1)=2 \qquad \cdots ㉡$$

㉠:

$g(-1)=3p(1+\alpha)=2,$

$-\frac{7}{2}g(1)=-\frac{7}{2}p(1-\alpha)=3$

연립방정식을 풀면

$\alpha=-8(<0)$ (×)

㉡:

$g(-1)=3p(1+\alpha)=3,$

$-\frac{7}{2}g(1)=-\frac{7}{2}p(1-\alpha)=2$

연립방정식을 풀면

$\alpha=\frac{11}{3},\ p=\frac{3}{14},$

$f(x)=\frac{3}{14}x(x-2)\left(x-\frac{11}{3}\right)$

$\therefore\ g(-5)=-\frac{3}{14}(-5)(-7)\left(-\frac{26}{3}\right)$

$=65$

답 65

E074 | 답 243

[풀이1]

평행이동의 관점에서 $\alpha=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두자.

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$h(x)=x^3+ax^2+bx+c$

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가), (나)에서

$h(0)=0,\ h'(0)=0,\ h'(\beta)=0$

이므로

$h(0)=c=0,\ h'(0)=b=0,$

$h'(\beta)=3\beta^2+2a\beta+b=0$

위의 세 식을 연립하면

$a=-\frac{3}{2}\beta,\ b=0,\ c=0$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-\frac{3}{2}\beta x^2$

이제 함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=2x^2+dx+e$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=4x+d$

조건 (가), (나)에서

$g'(0)=-16,\ g'(\beta)=16$

이므로

$g'(0)=d=-16,\ g'(\beta)=4\beta+d=16$

위의 두 식을 연립하면

$d=-16,\ \beta=8$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-12x^2$

$\therefore\ g(\beta+1)-f(\beta+1)=g(9)-f(9)=-h(9)=243$

답 243

H195

★★★ (2026(9)–미적분28)

삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times(g(0))^2$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=0,\ f''(\pi)=0$
(나) $\sin g(\pi)=0,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1
④ 3 ⑤ 9

H196

★★★ (2026(6)–미적분28)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(f(x))^5+(f(x))^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$ 이다.
(나) $f(-3)f(3)<0,\ f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

$f(\pi)=a\pi^3=2\pi$, $a=\dfrac{2}{\pi^2}$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{6}{\pi^2}(x-\pi)^2$

이고,

$f'(0)=-g'(0)\tan^2 g(0)$

$=-g'(0)(g(0))^2$ ($\because \tan g(0)=g(0)$)

이므로 구하는 값은 $-f'(0)$과 같다.

$\therefore\ g'(0)\times(g(0))^2=-f'(0)=-6$

답 ②

H196 | 답 ①

[풀이1]

조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여

$f(\alpha)=0$이고, $-3<\alpha<3$인

α가 적어도 하나 존재한다. …(*)

조건 (가)에서

$(f(x))^5+(f(x))^3$

$=\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)-(ax+b)$ …㉠

양변을 x에 대하여 미분하면

$5(f(x))^4f'(x)+3(f(x))^2f'(x)$

$=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}-a$ …㉡

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$20(f(x))^3(f'(x))^2+5(f(x))^4f''(x)$

$+6f(x)(f'(x))^2+3(f(x))^2f''(x)$

$=f(x)\times\{20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3f''(x)$

$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)\}$

$=\dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2}$ …㉢

(비로소 두 상수 a, b가 소거되었다.)

㉢에서 양변을 0으로 두면

$f(x)\times\{20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3f''(x)$

$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)\}=0$

$\Leftrightarrow$

$\dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2}=0$

$\Leftrightarrow$

$x=-2$ 또는 $x=1$

이때, 방정식 $f(x)=0$의 해집합을 P라고 하면

((*)에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 적어도 한 개 이상의 실근을 갖는다.)

$-2\in P$ 또는 $1\in P$

이고, 집합 P는 -2, 1 외의 실수를 원소로 갖지 않는다.

따라서

$P=\{-2\}$ 또는 $P=\{1\}$ 또는 $P=\{-2,\ 1\}$

$1\in P$라고 가정하고, ㉡에 $x=1$을 대입하면

$5(f(1))^4f'(1)+3(f(1))^2f'(1)$

$=\dfrac{2}{3}-a$, 즉 $0=\dfrac{2}{3}-a$, $a=\dfrac{2}{3}$

㉡에 $x=2$를 대입하면

$5(f(2))^4f'(2)+3(f(2))^2f'(2)$

$=\underbrace{\{5(f(2))^4+3(f(2))^2\}}_{0\text{ 또는 }+}f'(2)$

$=\dfrac{10}{17}-\dfrac{2}{3}<0$에서 $f'(2)<0$

그런데 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $1\not\in P$이고, $P=\{-2\}$

(이때, (*)의 α의 값이 유일하게 결정된다.)

㉡에 $x=-2$를 대입하면

$5(f(-2))^4f'(-2)+3(f(-2))^2f'(-2)$

$=-\dfrac{2}{3}-a$, 즉 $0=-\dfrac{2}{3}-a$, $a=-\dfrac{2}{3}$

이때, ㉡에 $x=2$를 대입하면 우변이 양수이므로

$f'(2)>0$임을 보일 수 있다.

㉠에 $x=-2$를 대입하면

$(f(-2))^5+(f(-2))^3=\ln\dfrac{9}{2}-\dfrac{4}{3}-b$, 즉

$0=\ln\dfrac{9}{2}-\dfrac{4}{3}-b$, $b=\ln\dfrac{9}{2}-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a\times e^b=-\dfrac{2}{3}\times e^{\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}=-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9}{2}\times e^{-\frac{4}{3}}$

$=-3e^{-\frac{4}{3}}$

답 ①

[참고1]

집합의 포함관계, 연산의 관점에서 풀이 과정을 다시 생각해보

자.

㉠: $(f(x))^3\{(f(x))^2+1\}$

$=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$

㉡: $(f(x))^2f'(x)\{5(f(x))^2+3\}$

$=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a$

㉢: $f(x)\times\{20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3f''(x)$

$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)\}$

$=\dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$

다음의 필요충분조건이 성립한다.

㉠: $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)=0$

㉡: $f(x)=0$ 또는 $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a=0$

㉢: $f(x)=0$ 또는

$20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3f''(x)$

$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}=0$

두 방정식

$f'(x)=0$,

$20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3f''(x)$

$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)=0$

의 해집합을 각각 Q, R이라고 하면

㉠: $P \Leftrightarrow \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)=0$

㉡: $P\cup Q \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a=0$

㉢: $P\cup R=\{-2,\ 1\}$

㉢에서 $P\subset\{-2,\ 1\}$이므로

$P=\{-2\}$ 또는 $P=\{1\}$ 또는 $P=\{-2,\ 1\}$

㉡+(나)에서 $1\not\in P$이므로 $P=\{-2\}$, $a=-\frac{2}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $b=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}$

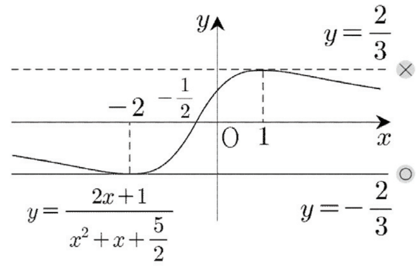
㉠, ㉡, ㉢의 오른쪽에서 주어진 세 방정식의 해집합은 모두 집합 P를 포함하고 있으므로 두 상수 a, b의 값을 구할 수 있었다. (다시 말하면 세 개의 항등식에서 미정계수의 결정을 한 것이다.) 이런 이유로 (가)에서 주어진 등식을 두 번 미분한 것이다.

[참고2]

$a=-\frac{2}{3}\left(a\neq\frac{2}{3}\right)$임을 다음과 같이 보일 수 있다.

곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$과 직선 $y=a$를 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.

(이때, 곡선은 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.)



$a=\frac{2}{3}$이면

㉡: $f'(x)\underbrace{\{5(f(x))^4+3(f(x))^2\}}_{0\text{ 또는 }+}$

$=\underbrace{\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}}_{\text{곡선}}-\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{직선}}\leq 0$

에서 $f'(x)\leq 0$, 즉 $f'(2)\leq 0$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a=-\frac{2}{3}$이면

㉡: $f'(x)\underbrace{\{5(f(x))^4+3(f(x))^2\}}_{0\text{ 또는 }+}$

$=\underbrace{\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}}_{\text{곡선}}+\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{직선}}\geq 0$

에서 $f'(x)\geq 0$

(단, 등호는 $x=-2$일 때 성립한다.)

즉, $f'(2)>0$

이는 조건 (나)를 만족시킨다.

$\therefore\ a=-\frac{2}{3}$

[풀이2]
함수 $f(x)$가 이계도함수를 가지므로
함수 $f'(x)$는 미분가능하고, 연속이다.
함수 $f'(x)$가 연속임을 이용하여 문제를 해결하자.
조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여
$f(\alpha)=0$이고, $-3<\alpha<3$인
α가 적어도 하나 존재한다. …(*)
조건 (가)에서
$$(f(x))^5+(f(x))^3$$
$$=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b) \quad \cdots ㉠$$
양변을 x에 대하여 미분하면
$$5(f(x))^4f'(x)+3(f(x))^2f'(x)$$
$$=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a \quad \cdots ㉡$$
정리하면
$$f'(x)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{-ax^2+(2-a)x+1-\frac{5}{2}a}{(f(x))^2\{5(f(x))^2+3\}\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)} & (f(x)\neq 0)\\ p & (f(x)=0)\end{cases}$$
(단, p는 상수)
(*)의 α에 대하여
$$\lim_{x\to\alpha}f'(x)=p(=f'(\alpha))$$
이면 함수 $f'(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이다.
극한 $\lim\limits_{x\to\alpha}f'(x)$이 수렴할 필요충분조건은
$$(\text{분자})=-ax^2+(2-a)x+1-\frac{5}{2}a=-a(x-\alpha)^2$$
이다.
(이때, 모든 실수 x에 대하여
$$5(f(x))^2+3>0,\ x^2+x+\frac{5}{2}>0$$
임을 이용한 것이다.)
이차방정식
$$-ax^2+(2-a)x+1-\frac{5}{2}a=0 \quad \cdots ㉢$$
은 중근을 가지므로
$$(\text{판별식})=(2-a)^2-4(-a)\left(1-\frac{5}{2}a\right)=0$$
즉, $-9a^2+4=0$, $a=\pm\dfrac{2}{3}$

우선 $a=\dfrac{2}{3}$라고 가정하자.
㉡에 $x=2$를 대입하면
$$\underbrace{\{5(f(2))^4+3(f(2))^2\}}_{0\text{ 또는 }+}f'(2)$$
$$=\frac{10}{17}-\frac{2}{3}<0$$
에서 $f'(2)<0$이므로 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
$$\therefore\ a=-\frac{2}{3}$$
마찬가지의 방법으로 ㉡에 $x=2$를 대입하면
우변이 양수이므로 $f'(2)>0$임을 보일 수 있다.
㉢에 $a=-\dfrac{2}{3}$를 대입하여 정리하면
$2x^2+8x+8=0$, $2(x+2)^2=0$, $x=-2$(중근)
즉, $\alpha=-2$
(이때, (*)의 α의 값이 유일하게 결정된다.)
㉠에 $x=-2$, $a=-\dfrac{2}{3}$를 대입하면
$$(f(-2))^5+(f(-2))^3=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}-b,\ 즉$$
$$0=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}-b,\ b=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}$$
$$\therefore\ a\times e^b=-\frac{2}{3}\times e^{\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}\times e^{-\frac{4}{3}}$$
$$=-3e^{-\frac{4}{3}}$$
답 ①

[풀이3]
그래프의 개형을 이용하여 문제를 해결하자.
문제에서 $a\times e^b\neq 0$라고 하였으므로 $a\neq 0$이다.
조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여
$f(\alpha)=0$이고, $-3<\alpha<3$인
α가 적어도 하나 존재한다. …(*)
조건 (가)에서
$$(f(x))^5+(f(x))^3$$
$$=(f(x))^3((f(x))^2+1)$$
$$=\underbrace{\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)}_{\text{곡선}}-\underbrace{(ax+b)}_{\text{직선}} \quad \cdots ㉠$$
양변을 x에 대하여 미분하면
$$5(f(x))^4f'(x)+3(f(x))^2f'(x)$$
$$=(f(x))^2f'(x)(5(f(x))^2+3)$$

$$= \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}}_{\text{곡선}} - \underbrace{a}_{\text{직선}} \qquad \cdots ㉡$$

두 방정식 $f(x)=0$, $f'(x)=0$의 해집합을 각각 P, Q라고 하면

㉠: $P \Leftrightarrow \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)=ax+b$

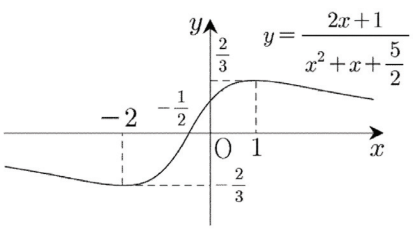
㉡: $P \cup Q \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}=a$

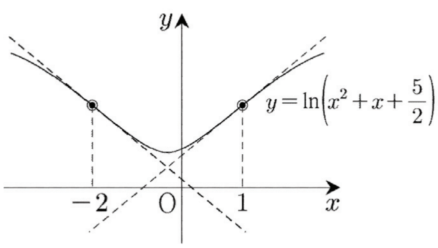
(단, $P \neq \varnothing$)

두 함수

$$y=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}},\ y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$

의 그래프는 다음과 같다.





(단, ◉는 변곡점이다.)

곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 두 변곡점에서의 접선의 기울기는 각각 $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$이다.

$a \neq 0$이므로 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$와 직선 $y=ax+b$의 교점의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

이때, 집합 P의 원소의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

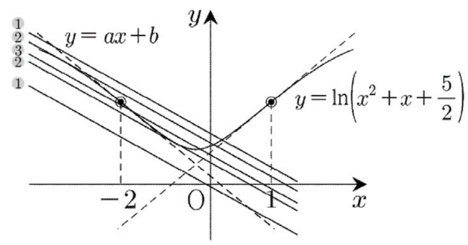
㉡에서 곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$와 직선 $y=a(\neq 0)$의 교점의 개수는 1 또는 2이다.

($\because P \neq \varnothing$에서 $P \cup Q \neq \varnothing$이므로 곡선과 직선이 만나지 않을 수 없다.)

이때, 집합 $P \cup Q$의 원소의 개수는 1 또는 2이므로, 집합 P의 원소의 개수는 3일 수 없다.

따라서 집합 P의 원소의 개수는 1 또는 2이다.

집합 P의 원소의 개수가 2라고 가정하자.



(위의 그림에서 5개의 직선의 기울기의 절댓값은 $\frac{2}{3}$ 미만이고, 0이 아니다. 그리고 기울기를 고정시킨 후에 y절편을 $-\infty$에서 ∞까지 변화시키면서 움직인 것이다.)

위의 그림처럼 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$와 직선 $y=ax+b$의 교점의 개수가 2일 때, 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하자. 즉, $P=\{\alpha,\ \beta\}$

롤의 정리에 의하여

$f'(\gamma)=0$이고, $\alpha<\gamma<\beta$인 γ가 적어도 하나 존재한다.

㉡: $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\} \subset P \cup Q$이므로

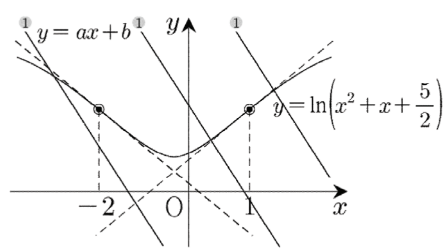
곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$과 직선 $y=a$의 교점의 개수는 3 이상이다.

이는 가정에 모순이므로 집합 P의 원소의 개수는 1이다.

즉, $P=\{\alpha\}$

이때, 직선 $y=ax+b$의 기울기의 절댓값은 $\frac{2}{3}$ 이상이다.

(아래 그림)



즉, $a \geq \frac{2}{3}$ 또는 $a \leq -\frac{2}{3}$

그런데 $a>\frac{2}{3}$ 또는 $a<-\frac{2}{3}$이면 곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$와 직선 $y=a$의 교점의 개수는 0이다.

그런데 $n(P \cup Q) \geq 1$이므로 이는 가정의 모순이다.

따라서 $a=-\frac{2}{3}\,(P=\{-2\})$ 또는 $a=\frac{2}{3}\,(P=\{1\})$

그런데 $a=\frac{2}{3}$이면 $x=2$일 때,

직선 $y=a$이 곡선 $y=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 위쪽 방향에 있으므로

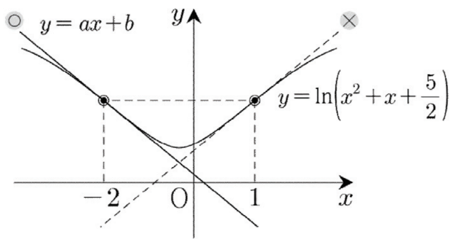
㉡에서 $f'(2)\underbrace{(f(2))^2(5(f(2))^2+3)}_{+}<0$, 즉

$f'(2)<0$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $a=-\frac{2}{3}$$(P=\{-2\})$

곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$과 직선 $y=ax+b$의 그래프는 다음과 같다.



(단, ◉는 변곡점이다.)

직선 $y=ax+b$는 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의

변곡점 $\left(-2,\ \ln\frac{9}{2}\right)$에서의 접선이다.

즉, $y=-\frac{2}{3}x+b$이 점 $\left(-2,\ \ln\frac{9}{2}\right)$을 지나므로

$\ln\frac{9}{2}=-\frac{2}{3}(-2)+b$, $b=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}$

$\therefore\ a\times e^b=-\frac{2}{3}\times e^{\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}\times e^{-\frac{4}{3}}$

$=-3e^{-\frac{4}{3}}$

답 ①

[참고3]

곡선

$$y=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}=\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

은 곡선 $y=\frac{2x}{x^2+\frac{9}{4}}$를 x축이 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동

한 것이다.

그런데 $x>0$일 때, 산술기하절대부등식에 의하여

$$\frac{2}{x+\frac{9}{4x}}\le\frac{2}{2\sqrt{x\times\frac{9}{4x}}}=\frac{2}{3}$$

(단, 등호는 $x=\frac{9}{4x}$ 즉, $x=\frac{3}{2}$일 때 성립한다.)

곡선 $y=\frac{2x}{x^2+\frac{9}{4}}$는 $x=\frac{3}{2}$일 때, 극댓값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

그런데 이 곡선은 원점에 대하여 대칭이므로, $x=-\frac{3}{2}$일 때,

극솟값 $-\frac{2}{3}$를 갖는다.

따라서 곡선 $y=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$는 $x=-2$일 때,

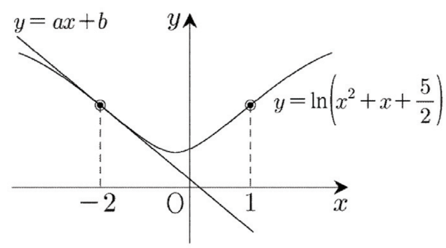
극솟값 $-\frac{2}{3}$를 갖고,

$x=1$일 때, 극댓값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

그리고 이 곡선은 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

[참고4]

초월함수의 근사를 이용하여 풀이를 해석해보자.



(단, ◉는 변곡점이다.)

$(f(x))^3\underbrace{((f(x))^2+1)}_{+}=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$

$\approx(x+2)^3\times p(x)$

(단, 모든 실수 x에 대하여 $p(x)\neq0$)

이므로 직선 $y=ax+b$는 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 변곡점에서의 접선이다.

(이때, 조건(나)의 $f'(2)>0$에 의하여 왼쪽 변곡점에서의 접선이다.)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$

조건 (나)에 의하여

$f'(0)=-a=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=1$이므로 $a=-1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$

ㄷ. (참)

방정식 $f(x)=x+1$을 정리하면

$x^4-x^3-2x^2=0$

좌변을 인수분해하면

$x^2(x-2)(x+1)=0$

$|f(x)-x-1|=|x^2(x-2)(x+1)|$

이므로 함수 $|f(x)-x-1|$는 $x=-1$, $x=2$에서 미분가능하지 않다.

E. 삼차함수의 그래프

주제: 변곡점에서의 접선

▸ 기출 p.74

예제 1

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3-3x$에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 모든 실수 t의 값의 합을 구하시오.

풀이1 대수적

접점의 x좌표를 s로 두자.

접선의 방정식은

$y=(3s^2-3)(x-s)+s^3-3s$

이 직선이 점 $(t,\ 2)$를 지나므로

$2=(3s^2-3)(t-s)+s^3-3s$

정리하면

$(s+1)\{2s^2-(3t+2)s+3t+2\}=0\cdots(*1)$

$\Leftrightarrow$ $s=-1$ 또는

$2s^2-(3t+2)s+3t+2=0$ $\cdots(*2)$

(*2)에 $s=-1$을 대입하면 $t=-1$

$t=-1$을 (*2)에 대입하면

$2s^2+s-1=0$, $(2s-1)(s+1)=0$

풀면 $s=\dfrac{1}{2}$ 또는 $s=-1$

즉, $t=-1$이면 삼차방정식 (*1)의 해집합은

$\left\{-1,\ \dfrac{1}{2}\right\}$이다. 이때, -1은 중근이다.

이차방정식 (*2)의 판별식을 D라고 하자.

$D=(3t+2)^2-4\times2\times(3t+2)=3(3t+2)(t-2)$

(1) $D>0$인 경우 ($t<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t>2$)

$t<-1$ 또는 $-1<t<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t>2$이면

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$t=-1$이면

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $D=0$인 경우 ($t=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t=2$)

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

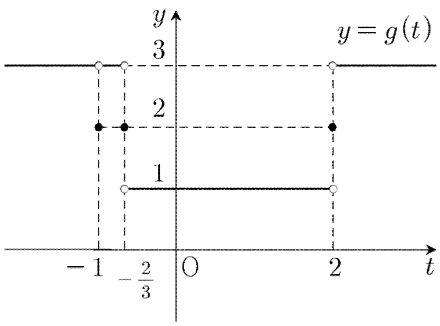
삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(3) $D<0$인 경우 $\left(-\dfrac{2}{3}<t<2\right)$

이차방정식 (*2)가 허근을 가지므로

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$가 불연속인 모든 실수 t의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}$이다.

답 $\dfrac{1}{3}$

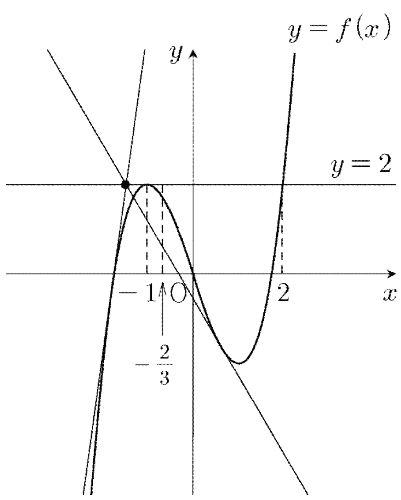
위의 풀이에서 -1, 2는 직선 $y=2$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표이고, $-\dfrac{2}{3}$는 직선 $y=2$가 '곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선' 과 만나는 점이다. 이를 아래의 풀이에서 확인하자.

풀이2 기하적

t의 값을 변화시키면서, 실제로 접선을 그어보자.

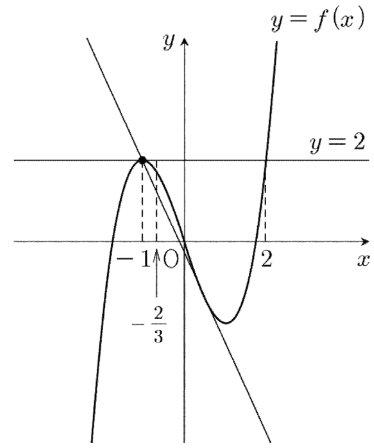
(1) $t<-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



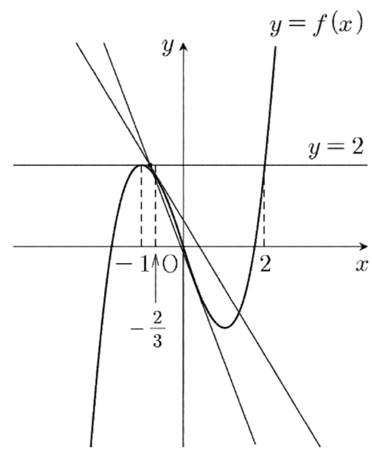
(2) $t=-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



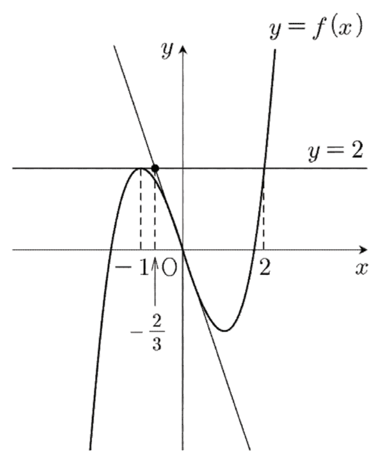
(3) $-1<t<-\dfrac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



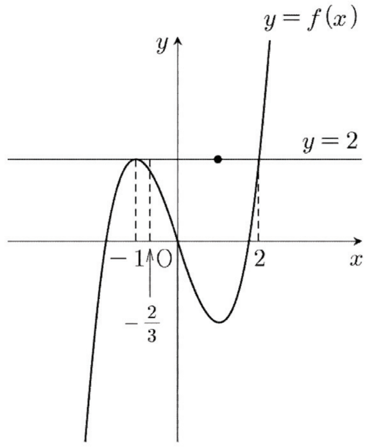
(4) $t=-\dfrac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다. 이때, 원점을 지나는 직선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선이다.



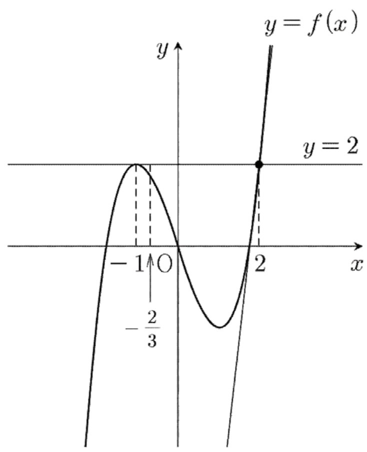
(5) $-\dfrac{2}{3}<t<2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 1개의 접선을 그을 수 있다.



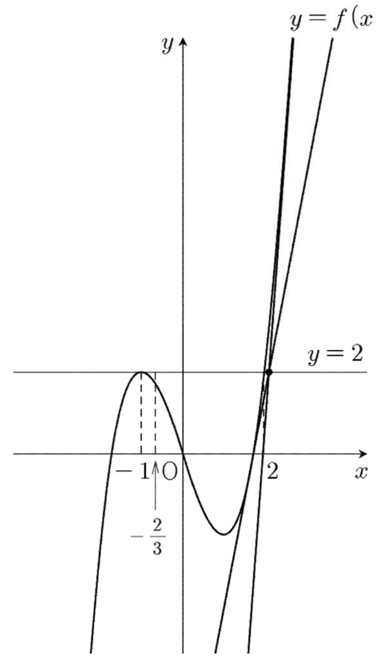
(6) $t=2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



(7) $t>2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



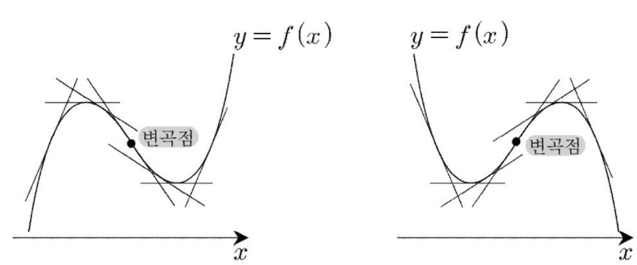
답 $\dfrac{1}{3}$

이 문제는 '대수적 풀이'와 '기하적 관찰'이 모두 가능하다. 전자의 경우 삼차방정식의 근의 분리와 이차방정식의 근의 분리가 적용된 풀이인데, 이는 수능에서 거의 매해 출제되는 전형적인 풀이에 해당하므로 반드시 익혀두어야 한다. 후자의 경우 t의 값을 변화시키면서 접선의 개수를 관찰하는 실전적인 풀이이다.

다음과 같은 관찰을 해보자.

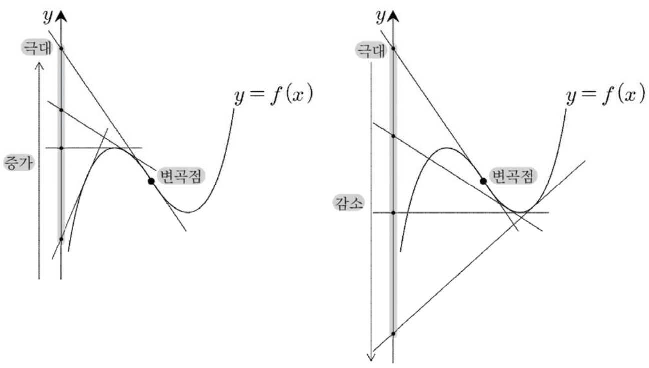
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 점 P가 변곡점 일 때 최소가 된다. (아래 왼쪽 그림)

최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 점 P가 변곡점 일 때 최대가 된다. (아래 오른쪽 그림)

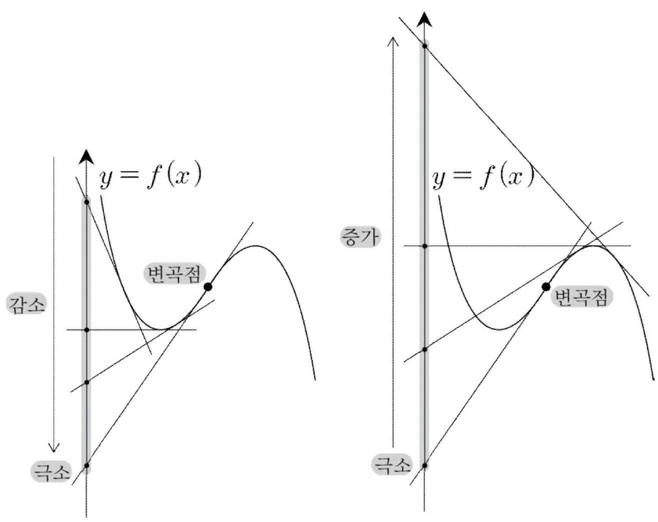


이제 다음의 관찰을 해보자.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$는 점 P가 변곡점일 때 극댓값을 갖는다.
(단, 곡선 $y=f(x)$와 y축의 위치 관계가 아래 그림과 같을 때로 한정하자.)



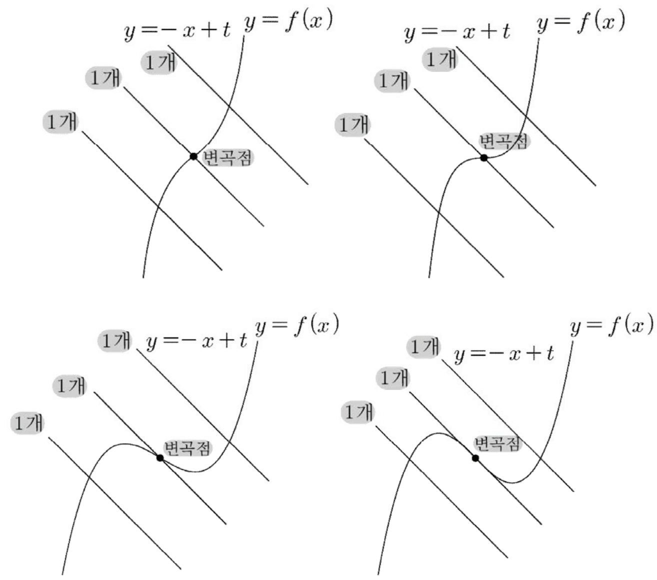
최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$는 점 P가 변곡점일 때 극솟값을 갖는다.
(단, 곡선 $y=f(x)$와 y축의 위치 관계가 아래 그림과 같을 때로 한정하자.)



• 삼차함수와 직선의 위치 관계

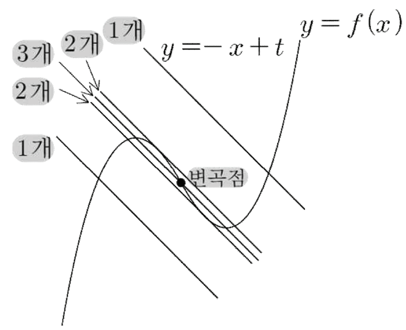
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속인 경우와 불연속인 경우를 구분해보자.

(1) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 기울기가 -1 이상인 경우



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(2) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 기울기가 -1보다 작은 경우



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 불연속이다. 이때, 불연속 점의 개수는 2이다.

E. 방정식 $f(f(x))=x$에 대한 연구

▸ 기출 p.77

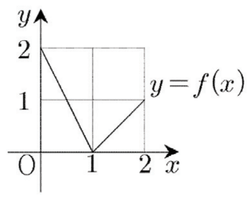
본 주제에 들어가기 전에 아래의 문제를 풀어보자.

예제 1

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수

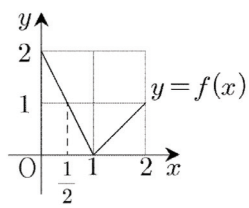
$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

의 그래프는 아래 그림과 같다.



방정식 $f(x+f(x))=1$을 만족시키는 모든 해의 합을 구하시오.

풀이

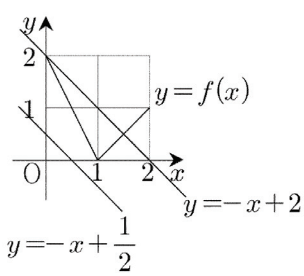


$f(\alpha)=1$을 풀면 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\alpha=2$

문제에서 주어진 방정식은 다음과 필요충분조건이다.

$x+f(x)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x+f(x)=2$

즉, $f(x)=-x+\dfrac{1}{2}(\cdots㉠)$ 또는 $f(x)=-x+2(\cdots㉡)$



위의 그림에서 ㉠은 해를 갖지 않고,

㉡: $x=0$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

답 $\dfrac{3}{2}$

• 방정식 $f(f(x))=x$의 실근에 대한 연구

(1) 항등식

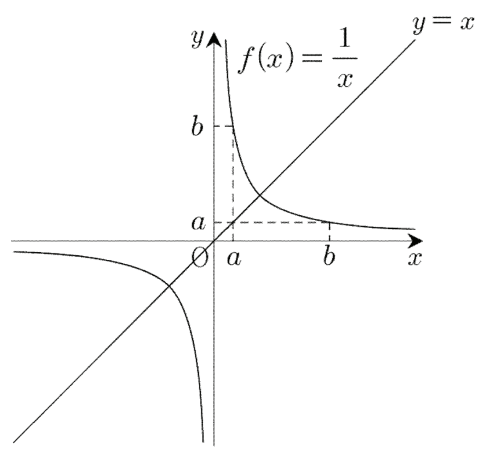
함수 $f:\ X\rightarrow X$의 정의역 X의 모든 x에 대하여

$f(f(x))=x$

가 성립하면 $f^{-1}=f$이다.

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(a,\ b)$를 지나면 이 곡선은 점 $(b,\ a)$를 반드시 지난다. 그리고 역도 성립한다.

예를 들어 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 역함수는 자기 자신이고, 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$이다.



참고

모든 실수 x에 대하여

$f(f(x))=x$

가 성립하는 다항함수 $f(x)$는 일차함수이다.

왜냐하면 $f(x)$가 $n(\ge 2)$차 이상이면 $f(f(x))$는 $n^2(\ge 4)$차 이상이기 때문이다.

함수 $f(x)$의 방정식을 구하면

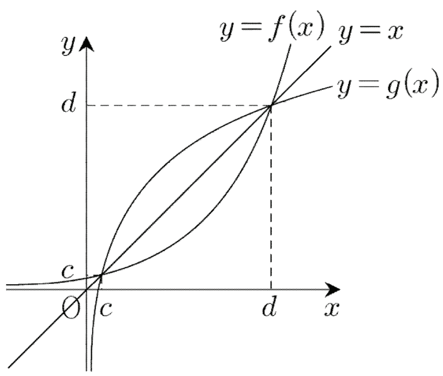
$f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x+k$(단, k는 실수)이다.

(2) 방정식

어떤 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$가 성립하는 경우를 알아보자.
방정식
$f(f(x))=x$ $\cdots(*)$
이 실근을 가질 때, 한 실근을 a라 하고, $f(a)=b$로 두면
$f(f(a))=a$에서 $f(b)=a$이다.
(*)에 $x=b$를 대입하면
$f(f(b))=f(a)=b$, 즉 $f(f(b))=b$
이므로 b는 방정식 (*)의 실근이다.
이제 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키 곡선을 $y=g(x)$라고 하자.

❶ $a=b$인 경우

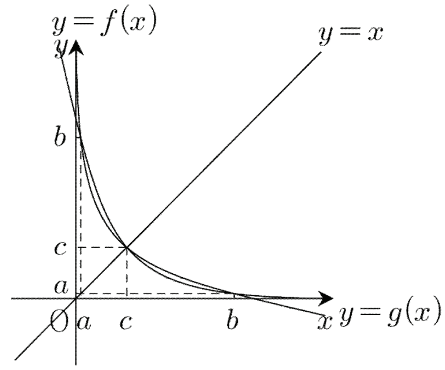
두 점 (a, b), (b, a)는 점 (a, a)로 일치하고,
이 점은 직선 $y=x$ 위에 있다.
예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.



(단, $f(c)=g(c)=c$, $f(d)=g(d)=d$)
위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 두 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있다.

❷ $a\neq b$인 경우

두 점 (a, b), (b, a)는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
이때, 이 두 점을 연결하여 만든 직선의 기울기는 -1이다.
예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.



(단, $f(a)=b$, $g(b)=a$, $f(c)=g(c)=c$)
위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 세 교점 중에서 두 점은 직선 $y=-x+a+b$ 위에 있고 (즉, 기울기가 -1인 직선 위에 있고) 나머지 한 점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

일반적으로 다음이 성립한다.

곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 곡선을 $y=g(x)$라고 하자.
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나서 생긴 교점의 좌표를 (a, b)라고 하면 이 두 곡선은 점 (b, a)도 지나므로
$f(a)=g(a)=b$, $f(b)=g(b)=a$
즉, $f(a)=b$, $f(b)=a$
$f(f(a))=f(b)=a$, $f(f(b))=f(a)=b$
이므로 $x=a$, $x=b$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.
역으로 $x=a$가 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이고,
$f(a)=b$이면
$f(f(a))=f(b)=a$, 즉 $f(b)=a$
방정식 $f(f(x))=x$에 $x=b$를 대입하면
$f(f(b))=f(a)=b$, 즉 $f(f(b))=b$
이므로 $x=b$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.
곡선 $y=f(x)$가 두 점 (a, b), (b, a)를 지나므로 곡선 $y=g(x)$는 두 점 (b, a), (a, b)를 지난다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 두 점 (a, b), (b, a)를 교점으로 가진다.

참고
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 대신에
두 도형 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$으로 두어야 하는 경우도 있다.

K155

★★★ (2022-확률과통계30)

흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, 나온 눈의 수가 4 이하이면 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자.

$a_5 + b_5 \ge 7$일 때, $a_k = b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

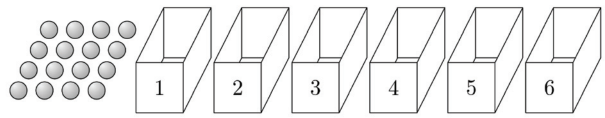
K156

★★★ (2026-확률과통계28)

16개의 공과 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 빈 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때, k가 홀수이면 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고, k가 짝수이면 k의 약수가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많을 확률은? [4점]



① $\dfrac{1}{8}$　② $\dfrac{3}{16}$　③ $\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{5}{16}$　⑤ $\dfrac{3}{8}$

• (3) 사건 $A^C\cap B^C$가 일어날 확률

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1+7+15}{2^7}=\frac{23}{2^7}$$

((2)의 ㉠, ㉡, ㉢인 경우이다.)

(1), (2), (3)에서

$$\mathrm{P}((A\cap B)^C)=\mathrm{P}(A^C\cup B^C)$$

$$=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$$

$$=\frac{29}{2^7}+\frac{34}{2^7}-\frac{23}{2^7}=\frac{5}{16}$$

이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$$

답 ①

K155 | 답 191

[풀이]

흰 공과 검은 공을 각각 ○, ●라고 하자.

첫 번째 시행 후 주머니 상태: ○○, ●

두 번째 시행 후 주머니 상태: ○○○○, ○○●, ●●

세 번째 시행 후 주머니 상태: ○○○○○○, ○○○○●, ○○●●($a_3=b_3$), ●●●

네 번째 시행 후 주머니 상태: ○○○○○○○○, ○○○○○○●, ○○○○●●, ○○●●●, ●●●●

다섯 번째 시행 후 주머니 상태: ○○○○○○○○○○(=10), ○○○○○○○○●(=9), ○○○○○○●●(=8), ○○○○●●●(=7), ○○●●●●(=6), ●●●●●(=5)

$$\mathrm{P}(a_5+b_5\geq 7)=1-{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$\mathrm{P}(a_k=b_k\cap a_5+b_5\geq 7)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 2\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

(∵ ○○●●⇨○○○○●●●, ○○●●⇨○○○○○○●●)

$$\therefore\ \mathrm{P}(a_k=b_k\,|\,a_5+b_5\geq 7)$$

$$=\frac{\mathrm{P}(a_k=b_k\cap a_5+b_5\geq 7)}{\mathrm{P}(a_5+b_5\geq 7)}$$

$$=\frac{60}{131}$$

$\therefore\ p+q=191$

답 191

K156 | 답 ②

[풀이]

2의 약수는 1, 2,

4의 약수는 1, 2, 4,

6의 약수는 1, 2, 3, 6

이므로 k의 값에 따라서 공이 들어가는 상자를 표시하면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5	6	합
1	○		○		○		3(홀)
2	○	○					2(짝)
3	○		○		○		3(홀)
4	○	○		○			3(홀)
5	○		○		○		3(홀)
6	○	○	○			○	4(짝)

전체를 다음의 두 경우로 구분할 수 있다.

홀+짝+짝+짝=홀 …(경우1)

홀+홀+홀+짝=홀, …(경우2)

예를 들어 k의 값이 4, 2, 6, 2의 순서대로 나오면 (경우1)에 해당하고,

k의 값이 1, 3, 3, 2의 순서대로 나오면 (경우2)에 해당한다.

이제 주사위를 한 번 던져서

1, 3, 4, 5가 나올 확률을 p,

2, 6이 나올 확률을 $q(=1-p)$라고 하면

$$p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ q=\frac{1}{3}$$

• (경우1)

확률은

$${}_4\mathrm{C}_1pq^3=\frac{8}{81}$$

3이 적힌 상자에 들어있는 공의 개수가

2가 적힌 상자에 들어있는 공의 개수보다

1개 더 많을 경우를 모두 찾자.

2가 적힌 상자에는 공이 최소한 3개 이상 들어간다.

3개(상자2), 4개(상자3): k의 값으로 $\underbrace{(1,\ 3,\ 5)}_{\text{한 개 선택}}$, 6, 6, 6

이 나오면 된다.

(예를 들어 6, 6, 3, 6,

5, 6, 6, 6, …)

이때, 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{108}$$

• (경우2)

확률은

$${}_4C_3p^3q=\frac{32}{81}$$

3이 적힌 상자에 들어있는 공의 개수가
2가 적힌 상자에 들어있는 공의 개수보다
1개 더 많을 경우를 모두 찾자.
2가 적힌 상자에는 공이 최소한 1개 이상 들어간다.
1개(상자2), 2개(상자3): ×
(∵ 예를 들어 k의 값이 1, 3, 4, 2가 나오면
3이 적힌 상자에는 공이 2개 들어가고,
2가 적힌 상자에는 공이 2개 들어간다.)
2개(상자2), 3개(상자3): k의 값으로

$$\underbrace{(1,\ 3,\ 5)}_{\text{한 개 선택}},\underbrace{(1,\ 3,\ 5)}_{\text{한 개 선택}},\ 4,\ 6$$

이 나오면 된다. (예를 들어 3, 5, 4, 6
5, 6, 4, 1, ⋯)
3개(상자2), 4개(상자3): ×
(∵ 예를 들어 k의 값이 1, 3, 5, 6이 나오면
3이 적힌 상자에는 공이 4개 들어가고,
2가 적힌 상자에는 공이 1개 들어간다.)
이때, 확률은

$${}_4C_2\times2!\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{108}+\frac{1}{12}}{\frac{8}{81}+\frac{32}{81}}=\frac{3}{16}$$

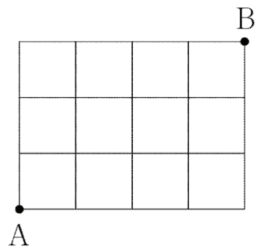
답 ②

J. 중복조합

주제: 사이에 넣기

예제 1

그림과 같은 직사각형 모양의 도로가 있다. A지점에서 출발하여 B지점까지 도로를 따라 최단거리로 갈 때, 방향을 바꾸는 횟수가 모두 3번인 경로의 수를 구하시오.



풀이

(1) 경우1: →↑→↑ (즉, →으로 시작)

가장 왼쪽부터 순서대로

→(p개), ↑(q개), →(r개), ↑(s개)

라고 하면

$p+r=4$, $q+s=3$ (단, $p\ge 1$, $q\ge 1$, $r\ge 1$, $s\ge 1$)

$p=p'+1$, $q=q'+1$, $r=r'+1$, $s=s'+1$

이라고 두면

$p'+r'=2$, $q'+s'=1$

(단, $p'\ge 0$, $q'\ge 0$, $r'\ge 0$, $s'\ge 0$)

경로의 수는

${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=6$

(2) 경우2: ↑→↑→ (즉, ↑으로 시작)

마찬가지의 방법으로 경로의 수는

${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=6$

따라서 구하는 경로의 수는

$6+6=12$

답 12

J. 경우의 수: 함수의 개수

• 순열, 중복순열, 조합, 중복조합: 함수의 개수

함수의 개수를 구하는 대표적인 문제들을 풀어보자.

예제 1

두 집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 집합 A에서 집합 B로의 함수 f 중에서 다음을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라.

(1) f는 함수이다.

(2) f는 일대일 함수이다.

(3) $f(1)<f(2)$

(4) $f(1)\le f(2)$

풀이

(1) $f(1)$, $f(2)$가 가질 수 있는 값을 표로 정리하면 다음과 같다.

$f(1)$	$f(2)$
1, 2, 3	1, 2, 3

따라서 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

(2) $f(1)$, $f(2)$가 가질 수 있는 값을 표로 정리하면 다음과 같다.

$f(1)$	$f(2)$
$\boxed{1}$, 2, 3	$\cancel{1}$, 2, 3

예를 들어 $f(1)=1$이면 $f(2)\ne 1$이므로 $f(2)$가 가질 수 있는 값은 2 또는 3이다.

따라서 일대일 함수 f의 개수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times 2=6$

(3) 집합 B의 원소 1, 2, 3 중에서 서로 다른 두 수 a, b를 택하자. (단, $a<b$)

$f(1)=a$, $f(2)=b$

로 두면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.

따라서 함수 f의 개수는

$${}_3\mathrm{C}_2=\frac{3\times 2}{1\times 2}=3$$

(4) 집합 B의 원소 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 두 수 a, b를 택하자. (단, $a\le b$)

$f(1)=a,\ f(2)=b$
로 두면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.
따라서 함수 f의 개수는

$${}_{3}\mathrm{H}_{2}={}_{3+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{4}\mathrm{C}_{2}=\frac{4\times3}{1\times2}=6$$

답 (1) 9 (2) 6 (3) 3 (4) 6

예제 2

두 집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r\},\ B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$
에 대하여 집합 A에서 집합 B로의 함수 f 중에서 다음을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라. (단, $1\le r\le n$)
(1) f는 함수이다.
(2) f는 일대일 함수이다.
(3) 정의역 A의 서로 다른 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여
$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
(4) $f(1)\le f(2)\le\ \cdots\ \le f(r)$

풀이

(1) r 이하의 자연수 k에 대하여 $f(k)$가 가질 수 있는 값은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중의 하나이다. 따라서 함수 f의 개수는
${}_{n}\Pi_{r}=n^{r}$
(2) $f(1)$이 가질 수 있는 값은
$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ (n개)
중의 하나이다.
예를 들어 $f(1)=2$라고 하자.
이때, $f(2)$가 가질 수 있는 값은
$1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$ ($n-1$개)
중의 하나이다.
예를 들어 $f(2)=n$이라고 하자.
이때, $f(3)$이 가질 수 있는 값은
$1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n-1$ ($n-2$개)
중의 하나이다.
$\vdots$
마지막으로 $f(r)$이 가질 수 있는 값은 유일하게 결정된다.
요컨대 $f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(r)$의 순서대로 대응되는 값을 결정하는 방법의 수는 $n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots,\ n-r+1$이다.
따라서 함수 f의 개수는
${}_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$
(3) 집합 B의 원소 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 서로 다른 r개의 수 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r$을 택하자.
(단, $b_1<b_2<\ \cdots\ <b_r$)
$f(k)=b_k$ (단, $1\le k\le r$)
로 두면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.
따라서 함수 f의 개수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$이다.
(4) 집합 B의 원소 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 중복을 허락하여 r개의 수 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r$을 택하자.
(단, $b_1\le b_2\le\ \cdots\ \le b_r$)
$f(k)=b_k$ (단, $1\le k\le r$)
로 두면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.
따라서 함수 f의 개수는 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$이다.

답 (1) ${}_{n}\Pi_{r}$ (2) ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$ (3) ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ (4) ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$

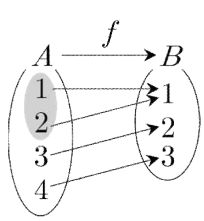
예제 3

두 집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\},\ B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r\}$
에 대하여 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수를 구하여라. (단, n과 r은 자연수이고, $f(A)=B$이다.)
(1) $n(B)=2$ (즉, $r=2$)
(2) $n(B)=3$ (즉, $r=3$)
(3) $n(B)=4$ (즉, $r=4$)
(4) $n(A)=4,\ n(B)=3$ (즉, $n=4,\ r=3$)
(5) $n(A)=5,\ n(B)=3$ (즉, $n=5,\ r=3$)
(6) $n(A)=6,\ n(B)=4$ (즉, $n=6,\ r=4$)

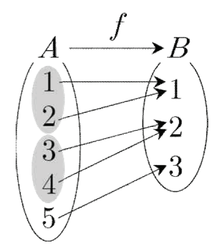
풀이

$f(A)=B$이므로 함수 f의 치역과 공역은 같다.
(1) 주어진 조건에서
$f(A)=B=\{1,\ 2\}$ (치역=공역)
함수 f의 개수는
${}_{2}\Pi_{n}-2=2^{n}-2$
이다. 이때, 2^{n}은 전체 함수 f의 개수이고, 뺀 2는 다음의 두 함수이다.
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=1,$
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=2$
(2) 주어진 조건에서

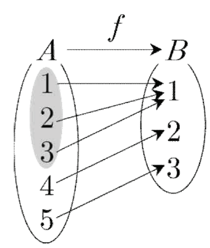
$f(A)=B=\{1,\ 2,\ 3\}$ (치역=공역)
전체 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_n$이다.
치역의 원소의 개수가 1인 함수 f의 개수는 3이다.
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=1,$
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=2,$
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=3$
치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는
${}_3C_2(2^n-2)$
이때, ${}_3C_2$는 치역의 원소를 택하는 방법의 수이고, 2^n-1은 원소의 개수가 n인 정의역에서 원소의 개수가 2인 공역(=치역)으로의 함수의 개수이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_n-\left\{3+{}_3C_2(2^n-2)\right\}$
$=3^n-3\cdot 2^n+3$
(3) 주어진 조건에서
$f(A)=B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ (치역=공역)
전체 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_n$이다.
치역의 원소의 개수가 1인 함수 f의 개수는 4이다.
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=1,$
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=2,$
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=3,$
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=4$
치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는
${}_4C_2(2^n-2)$
이때, ${}_4C_2$는 치역의 원소를 택하는 방법의 수이고, 2^n-1은 원소의 개수가 n인 정의역에서 원소의 개수가 2인 공역(=치역)으로의 함수의 개수이다.
치역의 원소의 개수가 3인 함수 f의 개수는
${}_4C_3\left[3^n-\left\{3+{}_3C_2(2^n-2)\right\}\right]$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_4\Pi_n-4-{}_4C_2(2^n-2)-{}_4C_3\left[3^n-\left\{3+{}_3C_2(2^n-2)\right\}\right]$
$=4^n-4\cdot 3^n+3\cdot 2^{n+1}-4$
(4) 주어진 조건에서
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$
이고, $f(A)=B$ (공역=치역)이다.



집합 A를 원소의 개수가 각각 2, 1, 1인 세 집합으로 분할하는 방법의 수는
${}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot\dfrac{1}{2!}={}_4C_2$
이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3에 대응시키는 방법의 수는
$3!$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_4C_2\times 3!=36$
(5) 주어진 조건에서
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$
이고, $f(A)=B$ (공역=치역)이다.



집합 A를 원소의 개수가 각각 2, 2, 1인 세 집합으로 분할하는 방법의 수는
${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot\dfrac{1}{2!}$
이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3에 대응시키는 방법의 수는
$3!$

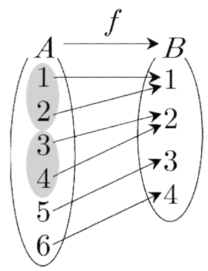


집합 A를 원소의 개수가 각각 3, 1, 1인 세 집합으로 분할하는 방법의 수는
${}_5C_3\cdot{}_2C_1\cdot\dfrac{1}{2!}$
이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3에 대응시키는 방법의 수는
$3!$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot 3!+{}_5C_3\cdot{}_2C_1\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot 3!$
$=90+60=150$
(6) 주어진 조건에서

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

이고, $f(A)=B$ (공역=치역)이다.

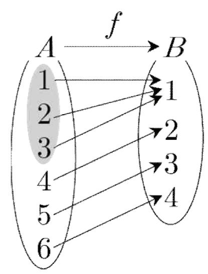


집합 A를 원소의 개수가 각각 2, 2, 1, 1인 네 집합으로 분할하는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!}$$

이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 방법의 수는

$4!$



집합 A를 원소의 개수가 각각 3, 1, 1, 1인 네 집합으로 분할하는 방법의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{1}{3!}$$

이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 방법의 수는

$4!$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1}{2!2!} \cdot 4! + \frac{{}_6C_3 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{3!} \cdot 4!$$

$=1560$

답 (1) 2^n-2 (2) $3^n-3\cdot 2^n+3$

(3) $4^n-4\cdot 3^n+3\cdot 2^{n+1}-4$

(4) 36 (5) 150 (6) 1560

예제 4

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 일대일대응 f 중에서 다음을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라.

정의역 A의 모든 x에 대하여 $f(f(x))=x$이다.

풀이

정의역 A의 두 원소 a, b에 대하여

$f(a)=b$

라고 하면

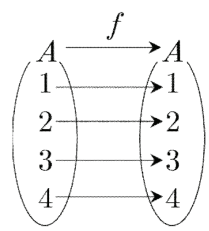
$f(f(a))=f(b)=a$, 즉 $f(b)=a$

이다.

$a=b$이면 $f(a)=a(=b)$

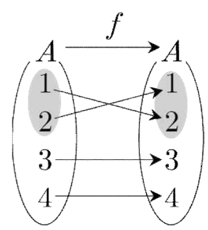
$a\neq b$이면 $f(a)=b$, $f(b)=a$

(1) $f(a)=a$인 a가 4개인 경우



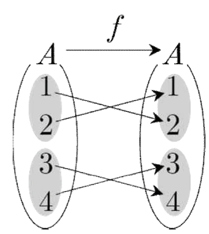
함수 f의 개수는 1이다.

(2) $f(a)=a$인 a가 2개인 경우



함수 f의 개수는 ${}_4C_2=6$이다.

(3) $f(a)=a$인 a가 존재하지 않는 경우



함수 f의 개수는 ${}_4C_2 \cdot \frac{1}{2!}=3$이다.

(1), (2), (3)에서 구하는 함수 f의 개수는

$$1+{}_4C_2+\frac{{}_4C_2}{2!}=1+6+3=10$$

답 10

참고

일반적인 경우를 생각해보자.

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 일대일대응 f 중에서 다음을 만족시키는 함수의 개수를 a_n이라고 하자. (단, n은 자연수)

정의역 A의 모든 x에 대하여 $f(f(x))=x$이다.

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+(n+1)a_n$

수능 대비를 위하여 위의 점화식을 암기할 필요는 없다.

J. 이항정리: 조합

• 조합: 파스칼의 삼각형

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중에서

(1) 원소의 개수가 0인 부분집합의 개수: ${}_5\mathrm{C}_0$

(2) 원소의 개수가 1인 부분집합의 개수: ${}_5\mathrm{C}_1$

(3) 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수: ${}_5\mathrm{C}_2$

그런데 이를 다음과 같이 생각할 수 있다.

포함	배제	개수
1		${}_4\mathrm{C}_1$: 2, 3, 4, 5 중에서 하나를 선택
2	1	${}_3\mathrm{C}_1$: 3, 4, 5 중에서 하나를 선택
3	1, 2	${}_2\mathrm{C}_1$: 4, 5 중에서 하나를 선택
4	1, 2, 3	${}_1\mathrm{C}_1$: 5 중에서 하나를 선택

위의 네 경우 중에서 어느 두 경우도 서로 배반이므로

${}_5\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1+{}_1\mathrm{C}_1$

(4) 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수: ${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2$

아래의 표와 같이 집합 U의 5개의 원소 중에서 서로 다른 2개를 선택하면, 3개의 원소가 남는다. 이때, 남은 3개의 원소만을 원소로 하는 집합의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2$이다. 따라서 ${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2$이다.

5개의 원소에서 2개를 선택	5개의 원소에서 3개가 남음(여집합)
1, 2	3, 4, 5
1, 3	2, 4, 5
1, 4	2, 3, 5
1, 5	2, 3, 4
2, 3	1, 4, 5
2, 4	1, 3, 5
2, 5	1, 3, 4
3, 4	1, 2, 5
3, 5	1, 2, 4
4, 5	1, 2, 3

(5) 원소의 개수가 4인 부분집합의 개수: ${}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1$

(4)와 마찬가지의 방법으로 생각하면 된다.

(6) 원소의 개수가 5인 부분집합의 개수: ${}_5\mathrm{C}_5$

E108
★★★ (2018사관(1차)-나형30)

$a \le 35$인 자연수 a와 함수

$$f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 4$$

에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = |f(x) - a|$$

라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y = g(x)$의 그래프와 직선 $y = b(b > 0)$이 서로 다른 4개의 점에서 만난다. (나) 함수 $\lvert g(x) - b \rvert$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 4이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

E109
★★★ (2023(3)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = |f(x) - t|$라 할 때,

$\displaystyle\lim_{x \to k} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.

함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{t \to 4+} h(t) = 5$ (나) 함수 $h(t)$는 $t = -60$과 $t = 4$에서만 불연속이다.

$f(2) = 4$이고 $f'(2) > 0$일 때, $f(4) + h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

E110
★★★ (2026사관(1차)-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 있다.

모든 실수 x에 대하여

$$|g(x)| = |f(x)|$$

가 성립한다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $g(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자.

서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

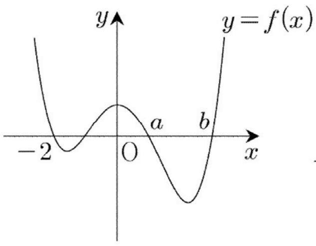
(가) 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극대이고, $f(-2) = 0$이다. (나) 함수 $g(x)$는 $x = a$와 $x = b$에서만 미분가능하지 않다. (다) 모든 실수 t에 대하여 $h(t) > 0$이고, $h(f(0)) > 2$이다.

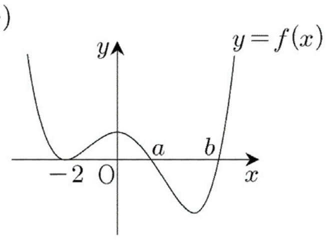
$h\left(\dfrac{64}{3}\right) = 4$일 때, $|g(-3) + g(0)|$의 값을 구하시오. [4점]

E110 | 답 9

[풀이]

(가): 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가
극댓값을 가지므로, 이 함수의 극점의 개수는 3이다.
그리고 $f(-2)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는
점 $(-2,\ 0)$을 지난다.
이때, 이 점이 극점일 수도 있고, 아닐 수도 있다.
(나): 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.
이상에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은
다음과 같이 두 가지를 생각할 수 있다.

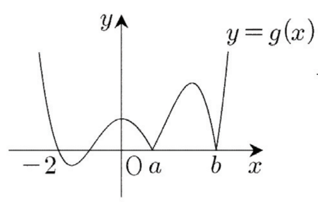


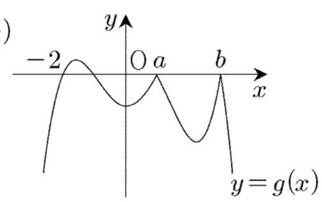


왼쪽을 (경우1), 오른쪽을 (경우2)라고 하자.

- (경우1)

함수 $g(x)$는 $x=a$, $x=b$에서 미분가능하지 않고,
그 외의 구간에서는 미분가능하다.
따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 다음의 두 가지가 가능하다.

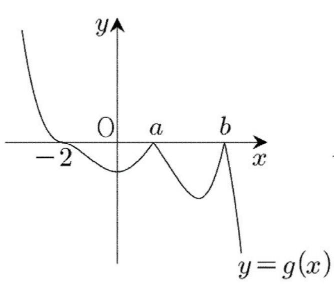


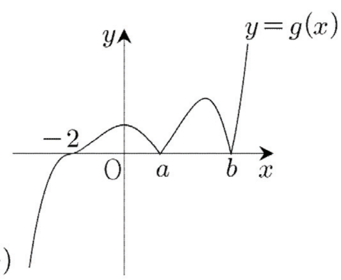


(다): 모든 실수 t에 대하여 $h(t)>0$이므로
모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와
직선 $y=t$는 항상 만나야 한다.
위의 두 그래프는 이 조건을 만족시키지 않는다.

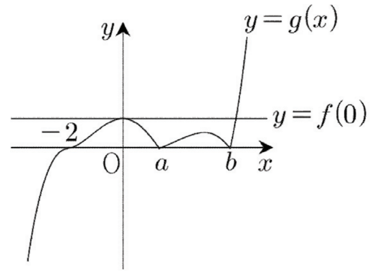
- (경우2)

치역이 실수 전체의 집합인 함수 $g(x)$의 그래프를 $x=a$, $x=b$에서만 미분가능하지 않도록 그리면 다음과 같다.

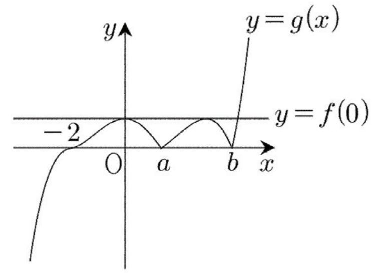




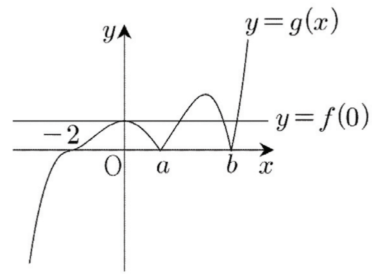
왼쪽 그림은 $t>0$일 때, $h(t)=1$이므로
$h\left(\dfrac{64}{3}\right)=4$를 만족시키지 않는다.
따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다.
이제 다음의 세 경우로 나누어 생각하자.



함수 $g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같으면
$h(f(0))=2$
이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.



함수 $g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같으면
$h(f(0))=3>2$
이지만, $t>0$일 때, $h(t)$가 가질 수 있는 값은
$5,\ 3,\ 1$
뿐이다. 즉, $h\left(\dfrac{64}{3}\right)=4$일 수 없다.
따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



위의 그림에서 $f(0)=\dfrac{64}{3}$임을 알 수 있다.
이제 함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.
$f(x)=(x+2)^2(x^2+px+q)$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2(x+2)(x^2+px+q)$
$+(x+2)^2(2x+p)$
$f'(0)=4q+4p=0$, 즉 $q=-p$,
$f(0)=-4p=\dfrac{64}{3}$, $p=-\dfrac{16}{3}$
이므로
$f(x)=(x+2)^2\left(x^2-\dfrac{16}{3}x+\dfrac{16}{3}\right)$
$\therefore\ |g(-3)+g(0)|$

$= \left| -\left(9+16+\frac{16}{3}\right)+4\times\frac{16}{3} \right|$

$=9$

답 9

E111 | 답 ①

[풀이1]

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 두고,

$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2=f(x)$로 두자.

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$f(x)=x^2+y^2+(x-3)^2+y^2$

$=x^2+(2x^2)^2+(x-3)^2+(2x^2)^2$

$(\because y=2x^2)$

$=8x^4+2x^2-6x+9$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=32x^3+4x-6$

방정식 $f'(x)=0$을 정리하면

$(2x-1)(8x^2+4x+3)=0$

풀면

$x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값(최솟값)을 갖는다.

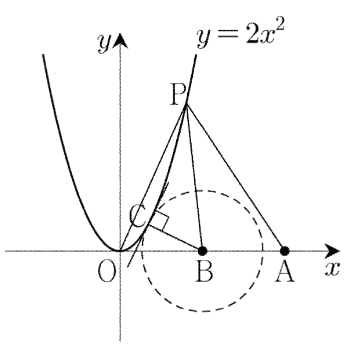
따라서 구하는 최솟값은

$f\left(\frac{1}{2}\right)=7$

답 ①

[풀이2] 시험장

선분 OA의 중점을 B라고 하자. 그리고 선분 BP의 길이가 최소일 때, 점 P를 점 C라고 하자.



중선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2=2(\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2)$

$=2\overline{\mathrm{PB}}^2+\frac{9}{2}\geq 2\overline{\mathrm{CB}}^2+\frac{9}{2}$

(단, 등호는 점 P가 점 C일 때 성립한다.)

이제 선분 BC의 길이를 구하면 된다.

점 C의 x좌표를 t라고 하자.

(곡선 $y=2x^2$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기)

$\times$(직선 BC의 기울기)$=-1$

이므로

$4t\times\dfrac{2t^2}{t-\frac{3}{2}}=-1$

정리하면

$16t^3+2t-3=0$

좌변을 인수분해하면

$(2t-1)(8t^2+4t+3)=0$

풀면

$t=\frac{1}{2}$이므로 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2\geq 2\overline{\mathrm{CB}}^2+\frac{9}{2}=7$

(단, 등호는 점 P가 점 C일 때 성립한다.)

답 ①

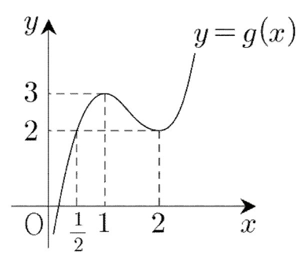
E112 | 답 ⑤

[풀이]

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 그래프는



(삼차함수의 비율관계에서 $g\left(\frac{1}{2}\right)=2$임을 알 수 있다.)

$f(x)=(x+1)^2+k-1\geq k-1$

(단, 등호는 $x=-1$일 때 성립한다.)

$g(f(x))$의 최솟값이 2이다. $\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{1}{2}$

즉, $k-1\geq\frac{1}{2}\quad\therefore\ k\geq\frac{3}{2}$

답 ⑤