1장. 분류

본능적으로 느껴졌어.

분류해야 된다는 걸.

얽힘도, 모자람도 없는

그 정갈함 잊지 못해.

경우의 수를 구한다는 것은 어떤 일이 끝나고 일어날 수 있는 각기 다른 결과의 가짓수를 세어보는 것입니다. 여기서 일어날 수 있는 각기 다른 결과를 '사건'이라고 하는데요. 따라서 경우의 수를 잘 구하려면 먼저 어떤 일을 하고 있는 것인지 상황을 정확히 파악한 후 그 일의 결과로 발생할 수 있는 사건을 빠짐없이, 중복없이 잘 세어야 합니다. 상황 파악과 사건 세기. 이 두 가지가 경우의 수를 구할 때 우리가 해야 할 일의 전부입니다. 그럼 사건을 하나씩 직접 세어보는 가장 원초적인 방법에서부터 시작해 보도록 합시다. 하나씩 셀 줄 알면 세는 과정에서 패턴을 발견하여 법칙이나 공식 따위를 자연스럽게 유도해 낼 수 있을 것입니다.

여기 메뉴가 아주 심플한 카페가 하나 있습니다. 커피음료로는 아메리카노와 카페라떼의 두 가지, 커피가 아닌 음료로는 아이스티, 유자차, 핫초코의 세 가지만 제공하는 카페입니다. 그렇다면 제가 이 카페에서 커피음료와 커피가 아닌 음료 중에서 하나를 골라 마시는 경우의 수를 하나씩 세어 보면 다음과 같습니다.

어떤 일을 하는가? ⇒ 커피음료와 커피가 아닌 음료 중 하나를 고른다.

일이 끝나고 일어날 수 있는 사건은?

⇒ 아메리카노를 고른다.
카페라떼를 고른다.
아이스티 고른다.
유자차를 고른다.
핫초코를 고른다.
} 5가지

여기서 이 5가지의 사건은 커피음료를 고르는 사건과 커피가 아닌 음료를 고르는 사건으로 분류해서 세어질 수 있는데요.

- 커피음료를 고른다.
  - 아메리카노를 고른다.
  - 카페라떼를 고른다.
  - 아이스티 고른다.
  - 3가지
- 커피가 아닌 음료를 고른다.
  - 유자차를 고른다.
  - 핫초코를 고른다.
  - 2가지

3+2=5가지

이 문제의 경우 상황이 워낙 간단해서 분류하고 세든, 그냥 세든 별반 차이가 없지만 상황이 복잡해지면 분류는 강력한 힘을 발휘합니다. 카페 사장님이 신메뉴를 개발하시어 아래 그림과 같이 메뉴가 보다 다양해진 상황에서 커피음료와 커피가 아닌 음료, 그리고 신메뉴 중 두 종류의 음료를 하나씩 마시는 경우의 수를 구해 봅시다. 사건을 무작정 세기 전에 우리의 머리는 본능적으로 세 종류의 음료 중 어떤 두 종류의 음료수를 마실지를 "분류"하게 됩니다. 커피와 커피가 아닌 음료를 마실 것이냐, 커피와 신메뉴를 마실 것이냐, 커피가 아닌 음료와 신메뉴를 마실 것이냐를 먼저 정하고 나야 각각의 사건을 세기가 편하기 때문이죠.

menu

coffee	non-coffee	new
· 아메리카노	· 아이스티	· 인절미 라떼
· 카페라떼	· 유자차	· 민트초코 프라페
	· 핫초코	

어떤 일을 하는가? : 세 종류의 음료 중 두 종류를 골라 하나씩 마신다.

- **coffee**와 **non-coffee**를 마신다.
  - 아메리카노와 아이스티를 마신다.
  - 아메리카노와 유자차를 마신다.
  - 아메리카노와 핫초코를 마신다.
  - 카페라떼와 아이스티를 마신다.
  - 카페라떼와 유자차를 마신다.
  - 카페라떼와 핫초코를 마신다.
  - 6가지
- **coffee**와 **new**를 마신다.
  - 아메리카노와 인절미 라떼를 마신다.
  - 아메리카노와 민트초코 프라페를 마신다.
  - 카페라떼와 인절미 라떼를 마신다.
  - 카페라떼와 민트초코 프라페를 마신다.
  - 4가지
- **non-coffee** 와 **new**를 마신다.
  - 아이스티와 인절미 라떼를 마신다.
  - 아이스티와 민트초코 프라페를 마신다.
  - 유자차와 인절미 라떼를 마신다.
  - 유자차와 민트초코 프라페를 마신다.
  - 핫초코와 인절미 라떼를 마신다.
  - 핫초코와 민트초코 프라페를 마신다.
  - 6가지

6+4+6=16가지

먼저 분류를!

이처럼 분류는 뇌가 일처리를 편하게 하기 위해 하는 자연스러운 활동입니다만 조심해야 할 것이 있습니다. 경우의 수를 세기 위해 분류한 각각의 카테고리들은 서로 중복되지 말아야 하며 카테고리들의 총합은 조건을 만족하는 모든 사건을 아울러야 있어야 합니다. 위의 예에서 **coffee**와 **non-coffee**를 마시는 사건과 **coffee**와 **new**를 마시는 사건, 그리고 **non-coffee**와 **new**를 마시는 사건은 서로 동시에 일어날 수 없는 사건들이며 이들 외에는 두 종류의 음료를 골라 마시는 일의 결과로 일어날 수 있는 사건이 없습니다. 따라서 각각의 사건의 가짓수의 합이 곧 가능한 모든 경우의 수가 됩니다.

세 종류의 음료 중 두 종류를 골라 하나씩 마신다.

coffee와 **non-coffee**를 마신다.	**coffee**와 **new**를 마신다.	**non-coffee** 와 **new**를 마신다.
6가지	4가지	6가지

6+4+6=16

자, 그럼 얽힘도, 모자람도 없이 정갈하게 분류하여 온전한 경우의 수를 구하는 연습을 해봅시다.

(2017 4월 교육청)

집합 $X = \{1,\ 2\}$에서 집합 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$으로의 함수 f 중에서 $f(1) + f(2)$가 4의 배수가 되도록 하는 f의 개수는?

이 문제에서 우리가 해야 일은 f(1)+f(2)의 값이 4의 배수가 되는 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f를 만드는 것이라 할 수 있습니다. 그렇다면, 공역의 원소가 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 뿐이므로 f의 두 함숫값의 합이 4의 배수가 되는 경우는 합이 4가 되거나, 8이 되거나, 12가 되거나의 셋 중 하나입니다. 이렇게 분류하여 세면 깔끔하겠네요.

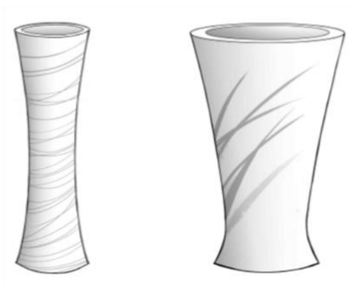
$(f(1), f(2))$

$$\left.\begin{cases} f(1)+f(2)=4 & \left\{\begin{matrix}(1,3)\\(2,2)\\(3,1)\end{matrix}\right\} \text{3가지} \\ f(1)+f(2)=8 & \left\{\begin{matrix}(2,6)\\(3,5)\\(4,4)\\(5,3)\\(6,2)\end{matrix}\right\} \text{5가지} \\ f(1)+f(2)=12 & \left\{(6,6)\right\} \text{1가지} \end{cases}\right\} \text{3+5+1=9가지}$$

*만약 문제가 f(1)+f(2)가 4의 배수가 되도록 하는 “일대일” 함수 f의 개수를 구하라고 했다면, 일대일 함수는 정의역의 서로 다른 원소가 서로 다른 함숫값을 갖는 함수($x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$)이므로 위의 9가지 f 중에서 f(1)과 f(2)의 값이 같은 (2, 2), (4, 4), (6, 6)의 세 가지 경우를 제외한 6가지가 답이 되겠죠?

(2016 10월 교육청)

장미 8송이, 카네이션 6 송이, 백합 8 송이가 있다. 이 중 1 송이를 골라 꽃병 A에 꽂고, 이 꽃과는 다른 종류의 꽃들 중 꽃병 B에 꽂을 꽃 9 송이를 고르는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 꽃은 서로 구분하지 않는다.)



해야 할 일은 세 종류(장미, 카네이션, 백합)의 꽃 중에서 꽃병 A에 1 송이를 꽂고 A에 꽂은 꽃과는 다른 종류의 꽃으로 꽃병 B에 9 송이를 꽂는 일입니다. 그렇다면 이 일의 결과로 일어날 수 있는 모든 사건들은 꽃병 A에 어떤 꽃을 꽂느냐에 따라 중복없이, 빠짐없이 분류될 수 있습니다.

꽃병 A에 장미를 꽂는다.

꽃병 A에 카네이션을 꽂는다.

꽃병 A에 백합을 꽂는다.

꽃병 A에 장미를 꽂는 경우, 꽃병 B에는 카네이션이나 백합으로 9송이를 꽂아야 하는데 카네이션과 백합이 각각 6송이, 8송이 씩 있으므로 카네이션 1송이와 백합 8송이, 카네이션 2송이와 백합 7송이, 카네이션 3송이와 백합 6송이, ... , 카네이션 6송이와 백합 3송이, 이렇게 모두 6가지의 방법으로 꽃병 B를 채울 수 있습니다.

꽃병 A에 장미를 꽂는다.

꽃병 B에 카네이션 1 송이와 백합 8 송이를 꽂는다.

2	7
3	6
4	5
5	4
6	3

6가지

꽃병 A에 카네이션을 꽂는 경우와 백합을 꽂는 경우의 수도 차근차근 세어 보면...

꽃병 A에 카네이션을 꽂는다.

꽃병 B에 장미 1 송이와 백합 8 송이를 꽂는다.

2	7
3	6
4	5
5	4
6	3
7	2
8	1

8가지

꽃병 A에 백합를 꽂는다.

꽃병 B에 장미 3 송이와 카네이션 6 송이를 꽂는다.

4	5
5	4
6	3
7	2
8	1

6가지

따라서 구하고자 하는 모든 경우의 수는 6+8+6=20가지가 되겠습니다.

다음 문제로 넘어가기 전에 이 문제 말미에 붙은 조건의 의미를 잠깐 생각해 봅시다.

> 장미 8송이, 카네이션 6 송이, 백합 8 송이가 있다. 이 중 1 송이를 골라 꽃병 A에 꽂고, 이 꽃과는 다른 종류의 꽃들 중 꽃병 B에 꽂을 꽃 9 송이를 고르는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 꽃은 서로 구분하지 않는다.)

이 조건 덕분에 하나씩 직접 세어도 지치지 않을 만큼 적은 경우의 수가 답으로 나온 것인데요. 만약 같은 종류의 꽃들이 서로 구분되었다면, 즉 장미 8 송이가 모두 같은 장미가 아니라 백장미, 흑장미, ... 등등 모두 각기 다른 장미들이고 카네이션과 백합도 한 송이 한 송이 각자 개성을 가진 서로 다른 꽃들이었다면 일어날 수 있는 사건이 매우 다채로워집니다. 꽃병 A에 장미를 꽂는 경우만 얼핏 생각해봐도 A에 백장미를 꽂느냐, 흑장미를 꽂느냐,..., 등 8가지의 서로 다른 사건들이 생기고 이어서 꽃병 B에 꽃을 꽂을 때에도 꽃들의 개수 뿐만 아니라 꽃들의 종류에 따라서 여러가지 구분되는 사건들이 생깁니다.

꽃병 B에 흰 카네이션 1 송이와 백합 8 송이를 꽂는다.
꽃병 B에 빨간 카네이션 1 송이와 백합 8 송이를 꽂는다.

꽃병 B에 카네이션 1 송이와 백합 8 송이를 꽂는다.
2 7

꽃병 A에 백장미를 꽂는다.
흑장미

꽃병 A에 장미를 꽂는다.

이처럼 경우의 수를 센다는 것은 서로 구별이 되는 각기 다른 사건의 가짓수를 세는 것이며 특히 뭔가를 나누어 담을 때는 나누어 담는 대상들이 서로 다른 것이냐 같은 것이냐에 따라 그 경우의 수가 달라진다는 점을 마음에 새겨 두시길 바랍니다. 언젠가 "나누어 담는" 문제를 집중적으로 다뤄 보도록 하겠습니다 ^^

(2010 수능)

같은 종류의 사탕 5개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주고, 같은 종류의 초콧릿 5개를 1개의 사탕을 받은 아이에게만 1개 이상씩 나누어 주려고 한다. 사탕과 초콜릿을 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

상황을 정리해보면, 같은 종류의 사탕 5개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 3명의 아이들에게 나누어 줘야 하는데 먼저 사탕을 1개 이상씩 나누어 준 뒤, 가엽게도 사탕을 1개밖에 받지 못한 아이에게만 초콜릿을 1개 이상씩 나누어 줘야합니다. 그렇다면 먼저 사탕을 나누어 주는 방법에 따라 사건을 분류하면 좋겠네요. 사탕 5개를 3명의 아이들에게 1개 이상씩 나누어 주려면 3개/1개/1개씩 나누어 주거나 2개/2개/1개씩 나누어 줘야 합니다. 이어서 편의상 3명의 아이들을 철수, 영희, 지혜라 하면 사탕을 3개/1개/1개씩 나누어 주는 경우 누가 3개의 사탕을 받는 행운을 누리느냐에 따라 3가지 사건이 일어날 수 있고 사탕을 2개/2개/1개씩 나누어 주는 경우에는 누가 1개의 사탕을 받는 불운을 겪느냐에 따라 역시 3가지 사건이 일어날 수 있습니다. (암묵적으로 경우의 수 문제에서 모든 인간은 서로 다른 대상으로 봅니다. 인간은 저마다 고유의 인격을 가졌으니까요^^)

- 사탕을 3개/1개/1개씩 나누어 준다.
  - 철수 3개/영희 1개/지혜 1개
  - 철수 1개/영희 3개/지혜 1개
  - 철수 1개/영희 1개/지혜 3개
- 사탕을 2개/1개/1개씩 나누어 준다.
  - 철수 2개/영희 2개/지혜 1개
  - 철수 2개/영희 1개/지혜 2개
  - 철수 1개/영희 2개/지혜 2개

이제 이 6가지 사건 각각에 대하여 초콜릿을 나누어 주는 방법의 수를 생각해 봅시다. 사탕을 철수 3개/영희 1개/지혜 1개씩 나누어 준 경우 사탕을 1개만 받은 영희와 지혜에게 5개의 초콜릿을 1개 이상씩 나누어 주는 방법의 수는 영희 1개/지혜 4개, 영희 2개/지혜 3개, 영희 3개/지혜 2개, 영희 4개/지혜 1개의 4가지 입니다. 나머지 경우도 차근차근 세어 보면......

- 사탕을 3개/1개/1개 (12가지)
  - 철수 3개/영희 1개/지혜 1개
    - (초콜릿을) 영희 1개/지혜 4개
    - 영희 2개/지혜 3개
    - 영희 3개/지혜 2개
    - 영희 4개/지혜 1개
  - 철수 1개/영희 3개/지혜 1개
    - (초콜릿을) 철수 1개/지혜 4개
    - 철수 2개/지혜 3개
    - 철수 3개/지혜 2개
    - 철수 4개/지혜 1개
  - 철수 1개/영희 1개/지혜 3개
    - (초콜릿을) 철수 1개/영희 4개
    - 철수 2개/영희 3개
    - 철수 3개/영희 2개
    - 철수 4개/영희 1개
- 사탕을 2개/1개/1개 (3가지)
  - 철수 2개/영희 2개/지혜 1개 —— (초콜릿을) 지혜에게 5개 몰빵
  - 철수 2개/영희 1개/지혜 2개 —— (초콜릿을) 영희에게 5개 몰빵
  - 철수 1개/영희 2개/지혜 2개 —— (초콜릿을) 철수에게 5개 몰빵

따라서 사탕과 초콜릿을 조건에 따라 나누어 주는 모든 경우의 수는 12+3=15가지가 되겠습니다.

(2006 6월 평가원)

집합 {2, 4, 6, 8, 10, 12}에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.)

세 수 중 두 수의 합이 나머지 한 수의 두 배이면 이들 세 수는 등차수열을 이룹니다.

$$■ + ▲ = 2●$$

$$\Rightarrow \frac{■ + ▲}{2} = ●$$

⇒ ■와 ▲의 가운데 값이 ●다.

⇒ ■, ●, ▲ 또는 ▲, ●, ■순으로 등차수열을 이룬다.

따라서 우리는 집합 {2, 4, 6, 8, 10, 12}에서 등차수열을 이루도록 세 수를 선택하는 경우의 수를 구해야 합니다. 저는 처음 이 문제를 풀 때 공차를 기준으로 경우를 분류하여 하나씩 세 보았는데요.

(a_1, a_2, a_3)

- 공차가 2가 되도록 세 수를 고른다. (2, 4, 6), (4, 6, 8), (6, 8, 10), (8, 10, 12) 4가지
- 공차가 4가 되도록 세 수를 고른다. (2, 6, 10), (4, 6, 12) 2가지

4+2=6가지

공차가 6 이상일 수는 없고 $a_1 < a_2 < a_3$이므로 공차가 음수인 등차수열(점점 작아지는 등차수열)은 생각하지 않는다.

수업하는 학생 중 한 명은 등차중항(가운데 항)을 기준으로 경우를 분류하여 풀더군요.

- 등차중항이 4가 되도록 세 수를 고른다. — (2, 4, 6) 1가지
- 등차중항이 6이 되도록 세 수를 고른다. (4, 6, 8), (4, 6, 12) 2가지
- 등차중항이 8이 되도록 세 수를 고른다. (6, 8, 10), (4, 8, 12) 2가지
- 등차중항이 10이 되도록 세 수를 고른다. — (8, 10, 12) 1가지

1+2+2+1=6가지

이처럼 원칙만 지킨다면(중복없이, 빠짐없이) 분류의 방법은 그 기준에 따라 다양할 수 있습니다.

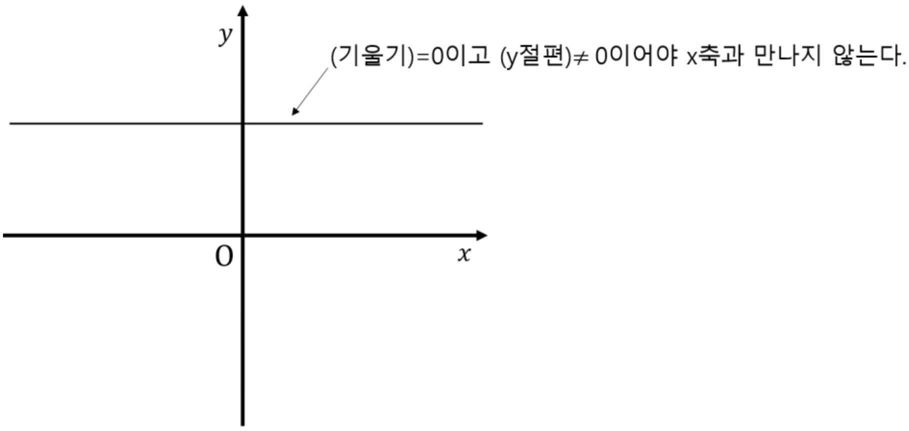
(2006 4월 교육청)

한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 하자.

$$f(x) = (a-4)x + 6,\ g(x) = (3-b)x + 2$$

라 할 때, 합성함수 $y = (f \circ g)(x)$의 그래프가 x 축과 만나지 않는 경우의 수는?

합성함수 $y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = (a-4)\{(3-b)x+2\} + 6 = (a-4)(3-b)x + 2a - 2$ 는 기울기가 $(a-4)(3-b)$이고 y절편이 $(2a-2)$인 직선입니다. 직선이 x축과 만나지 않으려면 기울기는 죽고 y절편은 살아 있어야 합니다.

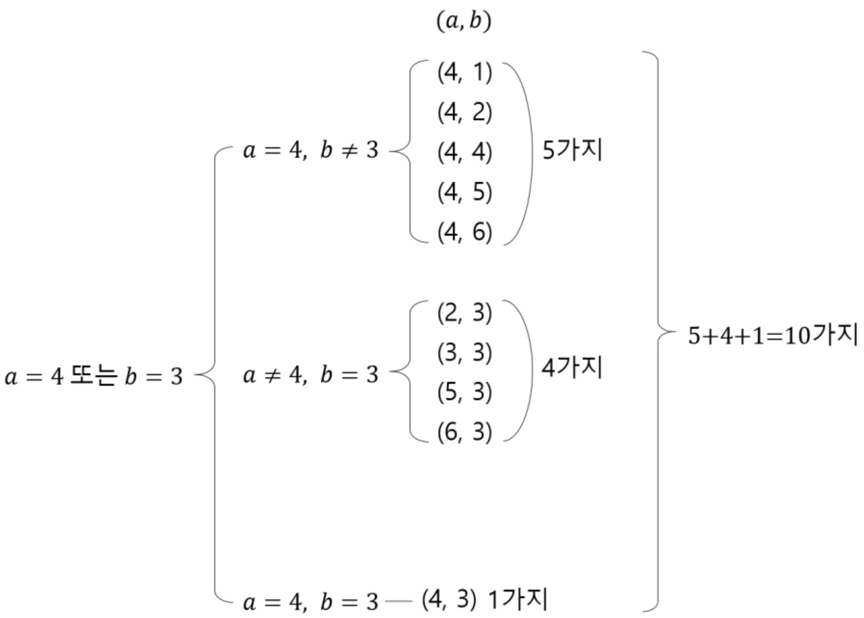


따라서 $(a-4)(3-b) = 0$에서 $a = 4$ 또는 $b = 3$ 이어야 하고 $(2a-2) \neq 0$에서 $a \neq 1$이어야 하는데요. "A 또는 B"라는 말은 오른쪽의 서로 중복되지 않는 세 가지 상황을 모두 포함하는 말이므로, $a = 4$ 또는 $b = 3$를 만족하는 경우의 수는 다음과 같이 분류해서 세어 볼 수 있습니다.

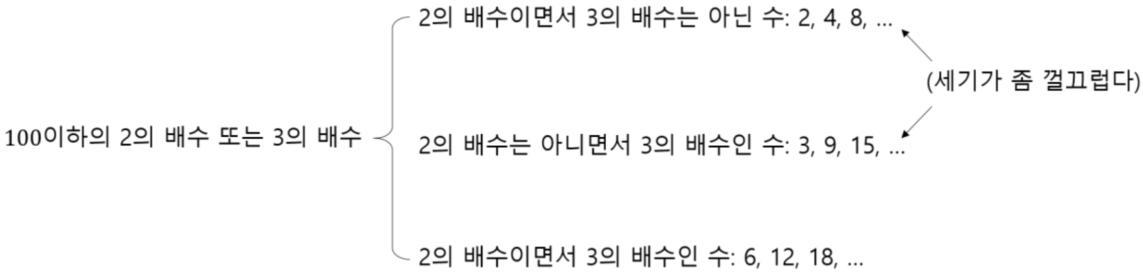
A 또는 B
- A ~~B~~ (A이고 B는 아닌)
- ~~A~~ B (A는 아니고 B인)
- A B (A이고 B인)

$$a = 4 \text{ 또는 } b = 3 \begin{cases} a = 4,\ b \neq 3 \\ a \neq 4,\ b = 3 \\ a = 4,\ b = 3 \end{cases}$$

그럼 $a \neq 1$임에 주의해서 각각의 나올 수 있는 주사위 눈의 가짓수를 세어보도록 하죠.



"A 또는 B"인 경우의 수를 구하는 또 다른 방법으로는 먼저 중복하여 센 후 두 번 이상 세어진 경우의 수를 빼서 구하는 방법이 있습니다. 예를 들어서 100이하의 2의 배수 또는 3의 배수의 개수를 구하고자 할 때, 2의 배수이면서 3의 배수는 아닌 수의 개수와, 2의 배수는 아니면서 3의 배수인 수의 개수와, 2의 배수이면서 3의 배수인 수의 개수를 각각 세어서 더하는 것 보다는 그냥 100이하의 2의 배수의 개수와 3의 배수의 개수를 더한 뒤 두 번 세어진 6의 배수(2와 3의 공배수)의 개수를 한 번 빼는 것이 간편합니다.



100이하의 2의 배수는 50개, 3의 배수는 33개, 2의 배수이면서 3의 배수인 수(6의 배수)는 16개므로

50+33-16=67

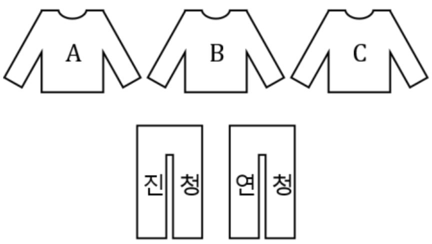
6의 배수들은 여기서 한 번, 요기서 한 번, 두 번씩 세어졌으므로 한 번 빼준다.

이처럼 중복하여 세더라도 스스로 중복해서 세었음 인지하고 그 가짓수를 적절히 조정해 준다면 정상적인 경우의 수를 구할 수 있습니다. 그럼 1장은 이쯤에서 마치도록 하겠습니다.

2장. 곱하기

"곱할 때와 곱하지 말아야 할 때를 아는 자의 모습은 얼마나 아름다운가."

저의 겨울 패션은 맨투맨과 청바지로 고정되어 있습니다. 만약 저에게 서로 다른 3장의 맨투맨과, 서로 다른 2장의 청바지가 있다면 제가 코디할 수 있는 방법의 수는 어떤 맨투맨을 입느냐를 기준으로 분류해서 세어 볼 수 있는데요. (물론 어떤 청바지를 입느냐를 기준으로 분류해 볼 수도 있습니다. 이건 뭐, 개인의 취향이지요)



A맨투맨을 입는다. — 진청을 입는다 / 연청을 입는다 — 2가지

B맨투맨을 입는다. — 진청을 입는다 / 연청을 입는다 — 2가지

C맨투맨을 입는다. — 진청을 입는다 / 연청을 입는다 — 2가지

2+2+2=6가지

이처럼 분류한 각각의 사건의 가짓수가 모두 같을 때는 곱하기를 이용하면 경우의 수를 보다 빠르게 구할 수 있습니다. 3장의 맨투맨 중 하나를 골라 입는 각각의 사건에 대하여 청바지를 입는 가짓수가 2가지로 동일하므로 제가 코디를 하는 모든 경우의 수는 3×2=6가지가 됩니다.

그런데 어느 날 갑자기 제가 C맨투맨과 연청의 조합이 꽝이라는 것을 깨닫고 "C맨투맨과 연청은 같이 입지 않는다"는 코디 원칙을 세운다면, 3장의 맨투맨 중 하나를 입는 각각의 사건에 대하여 청바지를 입는 경우의 수가 달라지므로 코디하는 경우의 수를 3×2로 계산할 수 없습니다. 이때는 A 또는 B맨투맨을 입는 사건과 C맨투맨을 입는 사건을 따로 분류해서 경우의 수를 세어야 하죠.

A 또는 B 맨투맨을 입는다.
- A맨투맨을 입는다. — 진청을 입는다. / 연청을 입는다.
- B맨투맨을 입는다. — 진청을 입는다. / 연청을 입는다.

4가지 (2×2)

C맨투맨을 입는다. — 진청을 입는다. 1가지 (1×1)

4+1=5가지

"곱할 때와 곱하지 못할 때를 구별하는 것" 이것이 이번 장에서의 우리가 길러야 할 안목입니다. 문제를 풀면서 연습해 보도록 하죠.

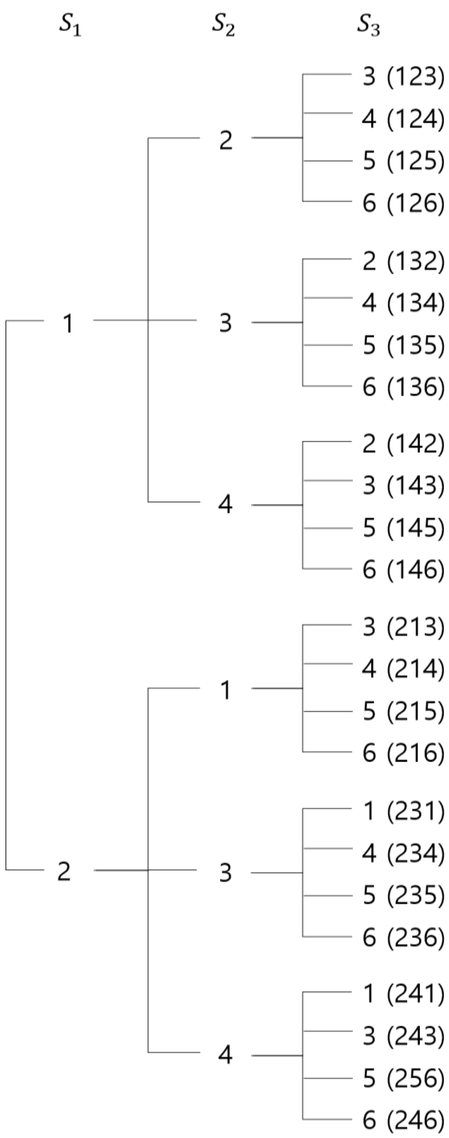
(2005 9월 평가원)

집합 S_1, S_2, S_3은 다음과 같다.

$$S_1 = \{1, 2\} \qquad S_2 = \{1, 2, 3, 4\} \qquad S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

집합 S_1에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수,
집합 S_2에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수,
집합 S_3 에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수의 개수는?

각 자리의 수가 모두 다른 세 자리 수를 만들어야 하는데 백의 자리의 수는 집합 S_1에서, 십의 자리의 수는 집합 S_2에서, 일의 자리의 수는 집합 S_3에서 꺼내 와야 합니다. 백의 자리가 1일 때와 2일 때로 분류하여 만들 수 있는 모든 수를 곧이 곧 대로 세어 보면 오른쪽 그림과 같은데요. 가만히 생각해보면, 집합 S_1에서 백의 자리의 수를 고르는 2가지 사건 각각에 대하여 집합 S_2에서 십의 자리의 수를 고르는 경우의 수가 3가지(백의 자리에 고른 수는 올 수 없음)로 동일하고, 다시 집합 S_2에서 십의 자리의 수를 고르는 각각의 사건에 대하여 집합 S_3에서 일의 자리의 수를 고르는 경우의 수가 4가지(백의 자리와 십의 자리에 고른 수는 올 수 없음)로 동일하므로 조건을 만족하는 모든 세 자리 수의 개수는 2×3×4=24로 계산할 수 있습니다.



그런데 거꾸로 일의 자리에서부터 수를 만들어 나가면 얘기가 조금 복잡 해집니다. 일의 자리에 1, 2, 3, 4 중 하나가 올 때는 십의 자리에 일의 자리에 놓은 1, 2, 3, 4 중 하나를 제외한 3가지 수가 올 수 있고, 일의 자리에 5, 6 중 하나가 올 때는 십의 자리에 제외되는 것 없이 4가지 수가 올 수 있습니다. 따라서 이때는 마냥 곱해 나갈 수는 없고 일의 자리에 1, 2, 3, 4 중 하나가 올 때와 5, 6 중 하나가 올 때로 사건을 분류하여 경우의 수를 세어야 하죠. 또, 십의 자리에 어떤 수가 오냐에 따라 일에 자리에 올 수 있는 수의 가짓수도 달라지므로 상황은 점점 복잡해집니다. 이처럼 일의 처리 순서에 따라 경우의 수를 구하는 과정이 간편해지기도, 험난해지기도 합니다.

(2006 4월 교육청)

그림은 어떤 학생이 작성한 수행평가 보고서의 표지이다.

머리말, 제목 인적사항의 글꼴을 표에서 각각 한 개씩 선택하여 바꾸려고 할 때, 글꼴이 모두 다른 경우의 수를 구하시오.

구분	글꼴
머리말	중고딕, 견고딕, 굴림체
제 목	중고딕, 견고딕, 굴림체, 신명조, 견명조, 바탕체
인적사항	신명조, 견명조, 바탕체

자, 어떤 순서로 머리말, 제목, 인적사항의 글꼴을 정해 나가야 경우의 수를 간편하게 구할 수 있을까요?

그렇죠~ 제목의 글꼴을 가장 마지막에 정해야 일이 쉽습니다. 머리말→인적사항→제목 순으로 글꼴을 정해보면, 머리말과 인적사항에 쓸 수 있는 글꼴은 서로 겹치지 않으므로 머리말의 글꼴을 정하는 3가지 사건 각각에 대하여 인적사항의 글꼴을 정하는 경우의 수가 3가지로 일정하고, 제목에 쓸 수 있는 글꼴은 머리말과 인적사항에 쓸 수 있는 글꼴을 모두 포함하므로 머리말과 인적사항에 쓸 글꼴을 정하는 각각의 사건에 대하여 제목을 정하는 경우의 수는 4가지로 일정합니다. 따라서 보고서의 글꼴을 정하는 모든 경우의 수는 $3\times3\times4=36$가지가 되겠습니다.

만약 머리말→제목→인적사항 순으로 글꼴을 정한다면 머리말의 글꼴을 정하는 3가지 사건 각각에 대하여 제목의 글꼴을 정하는 경우의 수는 5가지로 일정하지만 제목에서 인적사항에 쓸 수 있는 글꼴을 썼느냐 안 썼느냐에 따라 인적사항의 글꼴을 정하는 경우의 수가 달라지게 됩니다. 그렇다고 이 순서대로 경우의 수를 구하는 것이 불가능하다는 얘기는 아닙니다. 제목에다가 인적사항에 쓸 수 있는 글꼴을 쓰느냐 마느냐에 따라 사건을 분류해서 세면 되지요.

(머리말→제목→인적사항)

제목에 중고딕, 견고딕, 굴림체 중 하나를 쓴다. $3 \times 2 \times 3 = 18$

제목에 신명조, 견명조, 바탕체 중 하나를 쓴다. $3 \times 3 \times 2 = 18$

$18+18=36$가지

(2005 9월 평가원)

어느 고등학교의 방학 중 방과후 학교에서 1교시에는 2개 강좌, 2교시에는 3개 강좌, 3교시에는 4개 강좌를 개설하였다. 어떤 학생이 개설된 서로 다른 9개의 강좌 중 2개의 강좌를 선택하여 수강하려고 할 때, 그 방법의 수는? (단, 한 교시에는 1개 강좌만 수강할 수 있다.)

(방과 후 수업이라니 맘 같아선 한 개도 듣고 싶지 않지만 눈 딱 감고 두 개만 들어 봅시다.)

각각의 교시마다 개설된 강좌의 수가 다르므로 일단 3교시 중 어느 두 교시에 강좌를 수강할 것인 지에 따라 경우를 나눈 뒤 각각의 경우마다 강좌를 선택하는 방법의 수를 구하여 더하면 깔끔하겠습니다.

1교시에 강좌를 선택하는 2가지 사건 각각에 대하여

2교시에 강좌를 선택하는 경우의 수가 3가지로 일정

1교시와 2교시에 강좌를 수강한다. $2 \times 3 = 6$

2교시와 3교시에 강좌를 수강한다. $3 \times 4 = 12$

1교시와 3교시에 강좌를 수강한다. $2 \times 4 = 8$

$6+12+8=26$가지

(2003 12월(예비) 평가원)

세 주사위 A, B, C를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수를 구하시오.

몇 개의 자연수를 곱한 값이 짝수가 되려면 곱한 수들 중 적어도 한 개가 짝수면 됩니다. 즉, 세 주사위 A, B, C 중 한 개 이상의 주사위에서 짝수의 눈이 나와주어야 눈의 수의 곱이 짝수가 됩니다. 그렇다면 세 주사위 중 한 개의 눈이 짝수인 경우와, 두 개의 눈이 짝수인 경우, 그리고 세 주사위 모두 짝수의 눈이 나오는 경우로 분류해 볼 수 있겠네요.

한 개의 주사위에서 짝수의 눈이 나온다.

두 개의 주사위에서 짝수의 눈이 나온다.

세 개의 주사위에서 짝수의 눈이 나온다.

전지적 작가 시점에서 위의 세 가지 상황을 창조한다는 마인드로 각각의 경우의 수를 구해 봅시다. 먼저 세 개의 주사위 중 한 개의 주사위에서만 짝수의 눈이 나오는 상황을 만들려면 일단 3개의 주사위 어느 주사위에서 짝수의 눈이 나오도록 할지 정해야 하고, 그 주사위에서 구체적으로 3가지 짝수(2, 4, 6) 중 어떤 짝수가 나오도록 할지 정해야 하고, 또 나머지 두 개의 주사위 B와 C에서는 각각 3가지 홀수(1, 3, 5) 중 어떤 홀수가 나오도록 할 지까지 정해야 합니다.

3개의 주사위 중 어느 한 개의 주사위에서 짝수가 나오도록 할지...

짝수가 나오는 주사위에서 3가지 짝수 중 어떤 짝수가 나오도록 할지...

홀수가 나오는 주사위에서 3가지 홀수 중 어떤 홀수가 나오도록 할지...

홀수가 나오는 주사위에서 3가지 홀수 중 어떤 홀수가 나오도록 할지...

한 개의 주사위에서 짝수의 눈이 나온다. $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

나머지 두 상황에 대해서도 같은 방법으로 경우의 수를 구해보면,

3개의 주사위 중 어느 두 개의 주사위에서 짝수가 나오도록 할지... (A/B냐, A/C냐, B/C냐)

짝수가 나오는 주사위에서 3가지 짝수 중 어떤 짝수가 나오도록 할지...

짝수가 나오는 주사위에서 3가지 짝수 중 어떤 짝수가 나오도록 할지...

홀수가 나오는 주사위에서 3가지 홀수 중 어떤 홀수가 나오도록 할지...

두 개의 주사위에서 짝수의 눈이 나온다. $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

3개의 주사위에서 모두 짝수가 나오도록 한다.(이건 고민할 필요가 없음)

3가지 짝수 중 어떤 짝수가 나오도록 할지...

//

//

세 개의 주사위에서 짝수의 눈이 나온다. $1 \times 3 \times 3 \times 3 = 27$

따라서 세 주사위의 눈의 수의 곱이 짝수가 되는 모든 경우의 수는 81+81+27=189가지가 되겠습니다.

이렇게 분류하여 푸는 것도 나쁘지 않지만 좀 더 괜찮은 방법이 하나 있습니다. 세 주사위를 던질 때 일어날 수 있는 모든 사건들은 눈의 수의 곱이 홀수인 사건과 짝수인 사건으로 나뉩니다(곱이 홀수이면서 짝수인 오묘한 사건이나 짝수도 아니고 홀수도 아닌 사건은 일어날 수 없죠). 따라서 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수를 모든 경우의 수에서 빼면 눈의 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수가 남게 되는데 곱이 홀수려면 곱하는 모든 수가 홀수여야 하므로 경우의 수를 구하기가 한결 편합니다.

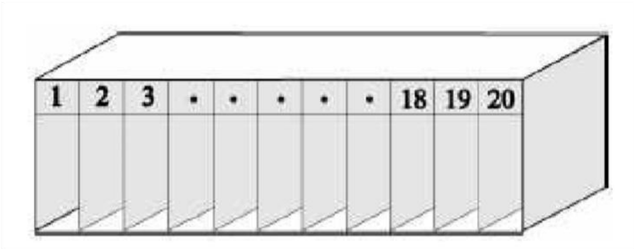
세 주사위를 던진다. $6 \times 6 \times 6 = 216$

눈의 수의 곱이 홀수다.	눈의 수의 곱이 짝수다
$3 \times 3 \times 3 = 27$	$216 - 27 = 189$

이처럼 분류의 카테고리가 많을 때는 그 사건이 아닌 경우의 수를 모든 경우의 수에서 빼는 것이 효율적인 방법일 수 있습니다.

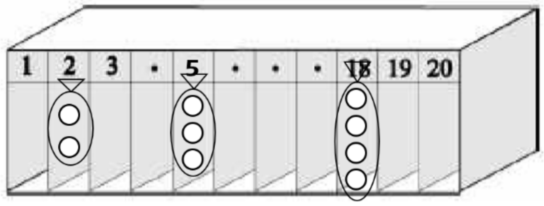
(2004 10월 교육청)

그림과 같이 1번부터 20번까지 번호가 적힌 20개의 칸이 있는 사물함이 있다.



같은 모양의 9개의 공을 2개, 3개, 4개로 나누어 사물함의 서로 다른 3개의 칸에 넣으려 한다. 이때, 홀수 번호가 적힌 칸에는 홀수 개, 짝수 번호가 적힌 칸에는 짝수 개를 넣고, 공이 들어갈 칸 중에서 오른쪽으로 갈수록 공의 개수가 많아지도록 공을 넣는 경우의 수를 구하시오.

아래 그림은 조건을 만족하도록 사물함에 공을 넣은 하나의 예입니다.



공 2개와 4개는 짝수 번호 칸에, 3개는 홀수 번호 칸에 넣되 2개, 3개, 4개 순으로 공이 들어가는 칸 번호가 커져야 한다

각각의 공 묶음이 어떤 번호의 칸에 들어 가느냐에 따라 다른 공 묶음이 들어갈 수 있는 칸의 가짓수가 달라지는 것을 눈치 채셨는지요. 예를 들어 공 2개짜리 묶음을 2번 칸에 넣으면 3개짜리 묶음은 3번, 5번, 7번, …19번 총 9가지 칸 중 하나에 넣을 수 있지만 2개짜리 묶음을 10번 칸에 넣으면 3개짜리 묶음은 11번, 13번, … 19번 총 5가지의 칸 중 하나에 넣을 수 있습니다. 따라서 세 묶음 중 한 묶음을 넣는 칸을 기준으로 경우를 분류해 볼 것인데 아무래도 공 3개짜리를 넣는 칸을 기준으로 잡는 것이 편할 것 같습니다. (만약 2개짜리 묶음을 기준으로 한다면 그에 따라 3개짜리 묶음이 사물함에 들어가는 경우의 수 뿐만 아니라 3개짜리 묶음을 어느 번호에 넣느냐에 따라 4개짜리 묶음은 넣는 경우의 수도 달라져서 생각할 것이 많아집니다. 4개짜리 묶음을 기준으로 해도 마찬가지죠.)

2개짜리 묶음을 1가지(2번)칸 중 하나에 넣는다.

4개짜리 묶음을 9가지(4번, 6번, ..., 20번)칸 중 하나에 넣는다.

3개짜리 묶음을 3번 칸에 넣는다. $1 \times 9 = 9$

3개짜리 묶음을 5번 칸에 넣는다. $2 \times 8 = 16$

3개짜리 묶음을 7번 칸에 넣는다. $3 \times 7 = 21$

⋮

3개짜리 묶음을 19번 칸에 넣는다. $9 \times 1 = 9$

$$1 \times 9 + 2 \times 8 + 3 \times 7 + 4 \times 6 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 7 \times 3 + 8 \times 2 + 9 \times 1 = 70 \times 2 + 25 = 165$$

=

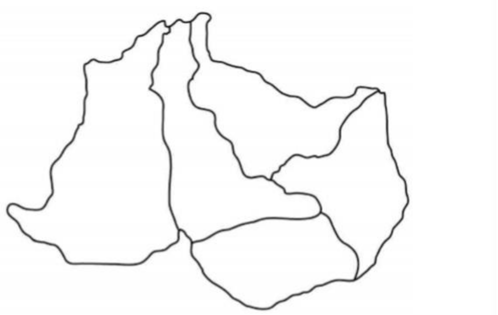
분류의 카테고리가 좀 많긴 하지만 경우의 수가 나름 규칙을 이루고 있어 계산하기가 나쁘지 않습니다. 수열을 좋아하는 학생이라면 $\sum$를 이용해서 계산할 수도 있죠.

$$1 \times 9 + 2 \times 8 + \cdots + 9 \times 1 = \sum_{k=1}^{9} k(10-k) = \sum_{k=1}^{9} (10k - k^2) = 10 \times \frac{9 \times 10}{2} - \frac{9 \times 10 \times 19}{6} = 165$$

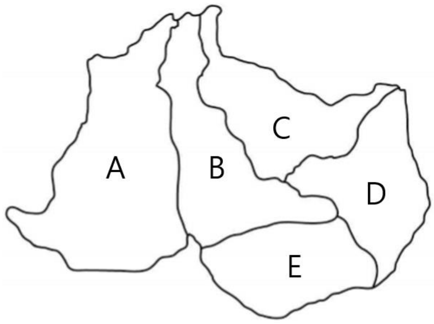
(오히려 이 문제는 조건을 만족하는 사건이 아닌 사건의 경우의 수를 구하는 게 더 골치 아픈 일이라 방금 전 주사위 문제를 풀면서 썼던 방법을 적용하기가 좀 그렇습니다.)

(2009 4월 교육청)

서로 다른 네 가지의 색이 있다. 이 중 네 가지 이하의 색을 이용하여 인접한 행정구역역 구별할 수 있도록 모두 칠하고자 한다. 다섯 개의 구역을 서로 다른 색으로 칠할 수 있는 모든 경우의 수는? (단, 행정 구역에는 한 가지 색만을 칠한다.)



편의상 다섯 개의 행정구역을 각각 A, B, C, D, E라 이름 붙이고 이들 구역을 구별하는 색칠놀이를 시작해 봅시다.

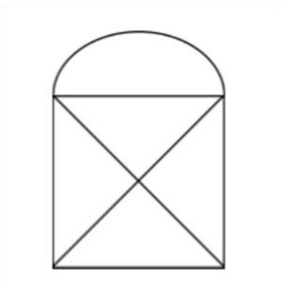


A, B, C, D, E 순으로 색을 칠해 나간다면 먼저 A에는 4가지 색 중 하나를 칠할 수 있고, B에는 A에 칠한 한 개의 색을 제외한 3가지 색 중 하나를 칠할 수 있고, C에는 B에 칠한 한 개의 색을 제외한 3가지 색 중 하나를, D에는 B와 C에 칠한 두 개의 색을 제외한 2가지 색 중 하나를, 마지막으로 E에는 B와 D에 칠한 두 개의 색을 제외한 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있습니다. 따라서 색칠놀이의 결과로 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 144$가지입니다.

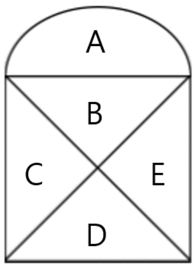
이렇게 물 흐르듯 곱하기로 주욱 이어 나갈 수 있는 색칠 놀이는 아주 쉬운 색칠 놀이입니다. 그럼 좀 더 재미있는 색칠 놀이를 해볼까요?

(2007 10월 교육청)

그림과 같이 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오.



이번에도 도형의 각 영역을 A, B, C, D, E라 이름 붙이고 이 순서대로 색을 하나씩 칠해 보겠습니다.



먼저 A에는 3가지 색 중 하나를 칠할 수 있고, B에는 A에 칠한 한 개의 색을 제외 한 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있고, C에는 B에 칠한 한 개의 색을 제외 한 2가지 색 중 하나를, D에는 C에 칠한 한 개의 색을 제외 한 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있는데……

E가 좀 걸립니다. 만약 B와 D에 같은 색을 칠했다면 E에는 그 색 한 개를 제외한 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있지만, B와 D에 서로 다른 색을 칠했다면 E에는 그 서로 다른 두 개의 색을 제외한 1가지 색 밖에 칠하지 못합니다. 이 두 가지 상황에 따라 E에 색을 칠하는 경우의 수가 달라지므로 곱하기를 중단하고 다시 처음으로 돌아가 분류의 가지를 칩시다.

B와 D에 같은 색을 칠한다.

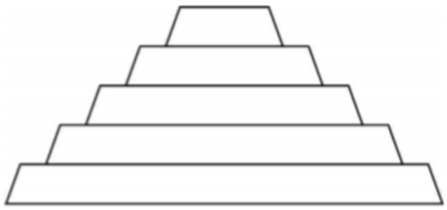
B와 D에 다른 색을 칠한다.

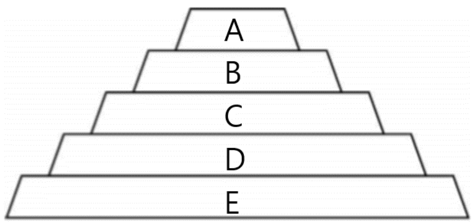
B와 D에 같은 색을 칠하기로 하고 색을 정해보면 일단 B와 D에 3가지 색 중 하나를 칠하고, A와 C와 E에는 각각 B와 D에 칠한 색을 제외하고 남은 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있으므로 이 경우 5개의 영역을 모두 칠하는 방법의 수는 $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ 가지입니다. B와 D에 서로 다른 색을 칠하기로 한다면 B에는 3가지, D에는 2가지, A에는 2가지, C와 E에는 B와 D에 두 개의 색을 제외하고 남은 1가지 색을 칠해야 방법의 수는 $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$가지입니다. 따라서 색을 칠하는 모든 경우의 수는 24+12=36가지가 되겠습니다.

이번 장의 마지막 문제입니다.

(2008 6월 평가원)

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오.





맨 위의 사다리꼴부터 맨 아래 사다리꼴까지 A, B, C, D, E 라 이름 붙이고 색을 칠해보겠습니다. 다만 이번에는 인접하는 사다리꼴끼리는 물론이고 맨 위 사다리꼴과 맨 아래 사다리꼴도 서로 다른 색을 칠해야 하므로 A→E→B→C→D 순으로 색을 정해 보겠습니다. 그럼 A에는 3가지, E에는 2가지, B에는 2가지, C에는 2가지를 칠할 수 있는데...... D가 걸리지요? C와 E에 칠한 색이 같냐 다르냐에 따라서 D에 칠할 수 있는 색의 가짓수가 달라집니다. 어서 분류하러 갑시다.

C와 E에 같은 색을 칠한다.

C와 E에 다른 색을 칠한다.

C와 E에 같은 색을 칠하는 경우, C와 E에 3가지 색 중 하나를 칠하면 A에는 이 색을 제외한 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있고 B에는 A와 C에 칠한 두 개의 색을 제외한 1가지, D에는 C와 E에 칠한 한 개의 색을 제외한 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있습니다. 따라서 색을 칠하는 방법의 수는 $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$ 가지가 됩니다

C와 E에 다른 색을 칠하는 경우에는 일단 C에 3가지 중 하나를 칠하면 E에는 2가지, 이어서 A에도 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있는데 문제가 또 생깁니다. A와 C에 칠한 색이 같냐 다르냐에 따라 B에 칠할 수 있는 가짓수가 달라지죠. 번거롭지만 A, C, E에 모두 다른 색을 칠하는 경우와 A와 C는 같고 E에는 다른 색을 칠하는 경우로 한 번 더 분류하여 방법의 수를 세어 봅시다. 먼저 A, C, E에 모두 다른 색을 칠하는 경우, A에 3가지 색 중 하나를 칠하면 C에는 2가지, 이어서 E에는 1가지 색 중 하나를 칠할 수 있고 A, C, E에 칠한 색이 모두 다르므로 B와 D에는 각각 1가지 색만 칠할 수 있습니다(3×2×1×1×1=6). A와 C는 같고 E에는 다른 색을 칠하는 경우에는 A와 C에 3가지 색 중 하나를 칠하면 E에는 2가지 색 중 하나를 칠할 수 있고 A와 C의 색이 같으므로 B에는 2가지, C와 E의 색은 서로 다르므로 D에는 1가지 색만 칠할 수 있습니다(3×2×2×1=12). 그리하여 C와 E에 다른 색을 칠하는 방법의 수는 6+12=18가지가 됩니다.

- C와 E에 같은 색을 칠한다. $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$
- C와 E에 다른 색을 칠한다.
  - A, C, E에 모두 다른 색을 칠한다. $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$
  - A와 C는 같고 E에는 다른 색을 칠한다. $3 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$

12+(6+12)=30가지

5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 모든 방법의 수는 12+18=30가지가 되겠네요

그럼 이번 장은 여기서 마치도록 하겠습니다. 부디 곱하기와 분류의 느낌을 소중히 간직하시길!