

2015개정

실전수학 (Ver.1)

수학(상) 250제

arco (지음)

실전수학 기본 구성과 특징

[실전수학 개념 정리]

기존 단순 나열식의 개념정리가 아니라 그 단원에서 요구하는 개념과의 연계성을 바탕으로 개념정리를 했으며, 2015개정 교과에서 추구하는 방향성에 도움이 될 수 있도록 개발되었습니다. 특히 왜 이러한 개념이 필요한지 필연성을 부여하여 설명하였습니다.

[실전수학 개념 + α]

개념학습에서 예제를 통해 학습한 내용을 다양한 관점에서 개념을 보다 심도 있게 확인할 수 있습니다.

[실전수학 기본문제]

개념을 확인하기 위해서 필수적인 문제를 실었습니다. 반복학습하면 기본실력을 기르는데 도움이 될 것입니다.

[실전수학 연습문제]

기본문제를 푼 다음 2가지 이상의 개념의 연계를 확인 할 수 있도록 구성하였습니다.

[실전수학 도전문제]

연습문제 이상의 수준으로 구성하였으며, 기본, 연습을 학습한 뒤에 생각의 난이도를 측정하기 위해 도움이 되는 문항으로 구성하였습니다.

목차

I. 다항식

1. 다항식의 연산	p3
2. 나머지정리와 인수분해	p8
(실전수학 $+ \alpha$)	p13
[실전수학 기본문제]	p14
[실전수학 연습문제]	p20
[실전수학 도전문제]	p25

II. 방정식과 부등식

1. 복소수와 이차방정식	p30
2. 이차방정식과 이차함수	p37
3. 여러 가지 방정식	p43
4. 여러 가지 부등식	p45
(실전수학 $+ \alpha$)	p51
[실전수학 기본문제]	p52
[실전수학 연습문제]	p79
[실전수학 도전문제]	p90

III. 도형의 방정식

1. 평면좌표	p95
2. 직선의 방정식	p100
3. 원의 방정식	p105
4. 도형의 이동	p110
(실전수학 $+ \alpha$)	p113
[실전수학 기본문제]	p114
[실전수학 연습문제]	p129
[실전수학 도전문제]	p140

<실전수학 정답과 풀이> p145

(2) 이차방정식의 근과 판별식

이차방정식의 근을 실수의 범위에서 복소수의 범위까지 확장

① 이차방정식의 근

계수가 실수인 이차방정식의 $ax^2 + bx + c = 0$ 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■ $b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac}$ 는 실수 $\Rightarrow$ 실수인 근을 갖는다.

■ $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac}$ 는 허수 $\Rightarrow$ 허수인 근을 갖는다.

(예시) $x^2 - 3x + 1 = 0$

근의 공식에서 $a = 1, b = -3, c = 1$ 이므로

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{실근})$$

(예시) $x^2 + x + 1 = 0$

근의 공식에서 $a = 1, b = 1, c = 1$ 이므로

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (\text{허근})$$

② 이차방정식의 근의 판별

근호안의 식 $b^2 - 4ac$ 이 값의 부호에 따라서 판별

■ $D = b^2 - 4ac$ 를 이차방정식의 **판별식**이라 한다.

$D = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 실근

$D = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ 서로 같은 두 실근(중근)

$D = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 허근

위에서 $D \geq 0$ 이면 실근을 갖는 것을 확인 할 수 있다.

■ 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식의 근의 판별

$ax^2 + 2b'x + c = 0$ 의 판별식 $D = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$,

$$\frac{D}{4} = b'^2 - ac$$

$\frac{D}{4} = b'^2 - ac > 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 실근

$\frac{D}{4} = b'^2 - ac = 0 \Rightarrow$ 서로 같은 두 실근(중근)

$\frac{D}{4} = b'^2 - ac < 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 허근

위에서 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이면 실근을 갖는 것을 확인 할 수 있다.

■ 삼차방정식과 허근

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 하면

$$\Rightarrow \omega^3 = 1$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^3 - 1 = 0, (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega = 1 \quad \text{또는} \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = 1 \quad \text{과} \quad \omega^2 + \omega = -1 \quad \text{의 꼴을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.}$$

(2) 연립이차방정식

$$\begin{cases} (\text{일차방정식}) = 0 \\ (\text{이차방정식}) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} (\text{이차방정식}) = 0 \\ (\text{이차방정식}) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} (\text{일차방정식}) = 0 \\ (\text{이차방정식}) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{일차식을 이차식에 대입} \Rightarrow (\text{이차식}) = 0 \quad \text{인 꼴로 정리한다.}$$

$$(\text{예시}) \quad \text{연립이차방정식} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + 3xy - 4y^2 = 0 \end{cases}$$

$$[1\text{단계}] \quad x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad * \quad y = -x + 2$$

$$[2\text{단계}] \quad x^2 + 3x(-x + 2) - 4(-x + 2)^2 = 0, \quad -6x^2 + 16x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 8x + 5 = 0,$$

$$(3x - 5)(x - 1) = 0, \quad x = 1 \quad \text{또는} \quad x = \frac{5}{3}$$

$$[3\text{단계}] \quad x = 1 \quad \text{이면 } * \quad y = -1 + 2 = 1, \quad y = 1$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \text{이면 } * \quad y = -\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} (\text{이차방정식}) = 0 \\ (\text{이차방정식}) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\text{일차방정식})^*(\text{일차방정식})^{\textcircled{2}} = 0 \\ (\text{이차방정식}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\text{일차방정식})^* = 0 \\ (\text{이차방정식}) = 0 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} (\text{일차방정식})^{\textcircled{2}} = 0 \\ (\text{이차방정식}) = 0 \end{cases}$$

$$(\text{예시}) \quad \text{연립이차방정식} \quad \begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$$

$$[1\text{단계}] \quad x^2 + xy - 2y^2 = 0, \quad (x + 2y)(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \text{또는} \quad x = -2y$$

$$[2\text{단계}] \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$$

$$[3\text{단계}] \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}, \quad x = y \quad \text{이므로} \quad x^2 + y^2 = 50 \quad \text{에 대입하여 정리하면}$$

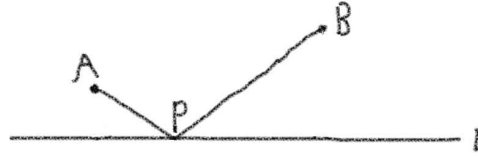
$$2x^2 = 50, \quad x^2 = 25, \quad x = \pm 5$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}, \quad x = -2y \quad \text{이므로} \quad x^2 + y^2 = 50 \quad \text{에 대입하여 정리하면}$$

$$4y^2 + y^2 = 50, \quad 5y^2 = 50, \quad y = \pm \sqrt{10}$$

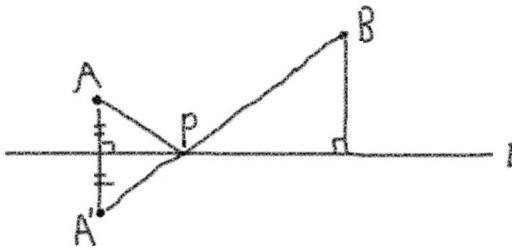
(실전수학 + α) / 대칭이동을 이용한 최단거리

직선 l 에 대하여 같은 방향에 두 점 A, B 가 있을 때, 점 A 에서 직선 l 위의 한 점을 거쳐 점 B 까지 가는 최단 거리는 대칭이동을 이용하여 구할 수 있습니다.

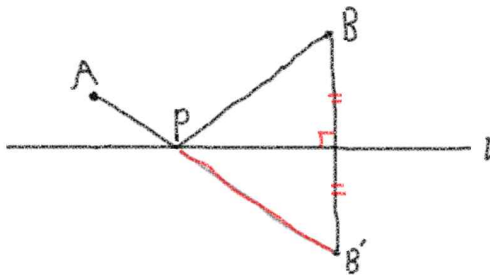


(실전수학) $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하면 점 A 에서 직선 l 을 거쳐 B 까지 가는 최단 거리를 구할 수 있습니다.

$$\Rightarrow \text{(i)} \quad \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AA'} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$$



$$\Rightarrow \text{(ii)} \quad \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{BB'} + \overline{AP} \geq \overline{AB'}$$



즉, 점 A 에서 직선 l 위의 한 점 P 를 거쳐 점 B 까지 가는 최단 거리는 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AA'} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 또는 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{BB'} + \overline{AP} \geq \overline{AB'}$ 가능함을 알 수 있다.

좌표 평면에서 거리의 최단 거리 문제의 경우 위와 같이 점의 축에 대한 대칭을 이용하여 접근하면 됩니다. 특히 좌표평면에서는 점의 좌표가 주어지고, 실생활 적용 문제의 경우 거리가 주어졌으니 이와 같은 경우 대칭이동을 이용해서 거리 또는 거리의 합에 값을 구할 수 있습니다.

[실전수학 기본문제]

1. 실수 a 에 대하여 $z = (2-a) + (4-a^2)i$ 가 $z^2 > 0$ 을 만족시키도록 하는 a 의 값을 구하시오.

2. 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1-i} + \frac{b}{1+i} = 1+2i$ 가 성립할 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 의 값을 구하시오.

3. 복소수 z 의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $(1-i)z + (2-i)\bar{z} = 3-i$ 가 성립할 때, $z - \bar{z}$ 의 값을 구하시오.

[실전수학 연습문제]

4. $-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}} + \frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-2}} + \sqrt{-1} \sqrt{-2} + \sqrt{-2} \sqrt{3} = a + bi$ 를 만족시키는 두 실수 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하시오

5. x 에 대한 이차식 $x^2 - (2t + 4)x + 3t^2 - t + 1$ 이 완전제곱식이 되도록 하는 모든 실수 t 의 값의 합을 구하시오.

6. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 영석이는 b 를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 1과 -2 가 되었고, 형명이는 c 를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 3과 -4 가 되었다. 처음 이차방정식의 근을 구하시오.

[실전수학 도전문제]

7. 좌표평면에서 원점과 직선 $x + y - 3 + k(x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값을 구하시오.

8. 세 직선 $y = -x$, $y = mx + 3$, $y = 2x - 3$ 이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합을 구하시오.

[정답 및 풀이]

1. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + px + p + 3 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 p 의 값 구하시오.

1. 판별식 $D = p^2 - 4(p + 3) = p^2 - 4p - 12 = (p - 6)(p + 2) = 0$,
 $p = 6$ 또는 $p = -2$

2. a 가 실수일 때, 이차방정식 $x^2 + ax + a - 1 = 0$ 은 실근을 가짐을 보이시오.

2. 판별식 $D = a^2 - 4(a - 1) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 \geq 0$
즉, 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다.

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 - m = 0$ 이 다음과 같은 근을 갖도록 실수 m 의 값의 범위를 구하시오.

- (1) 실근
- (2) 서로 다른 두 실근
- (3) 중근
- (4) 서로 다른 두 허근

3. 이차방정식 판별식 $\frac{D}{4} = 1^2 - (3 - m) = 1 - 3 + m = m - 2$

(1) 판별식 $\frac{D}{4} = 1^2 - (3 - m) = m - 2 \geq 0$, $m \geq 2$

(2) $\frac{D}{4} = 1^2 - (3 - m) = m - 2 > 0$, $m > 2$

(3) $\frac{D}{4} = 1^2 - (3 - m) = m - 2 > 0$, $m = 2$

(4) $\frac{D}{4} = 1^2 - (3 - m) = m - 2 < 0$, $m < 2$

4. 이차방정식 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 두 근을 α , β 라고 할 때, $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ 의 값을 구하시오.

4. $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 2$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1^2 - 2 \times 2}{2^2} = -\frac{3}{4}$$

5. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 두 실수 a , b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하시오.

5. $1 + i$ 가 이차방정식의 한 근이므로 켈레복소수인 $1 - i$ 도 근이다.

$$a = (1 + i) + (1 - i) = 2, \quad b = (1 + i)(1 - i) = 2 \text{이므로}$$
$$a - b = 0$$