15. [수2&미적분1 -미적분1 ebsi 실력2번 p152 변형]

함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2ax+2b & \left(x<\dfrac{3}{2}\right) \\ x^2+3cx+3d & \left(x\ge\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$이 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{2}$에서 미분가능하다. |
| (나) 함수 $\lvert f(x)\rvert$는 $x=p\left(p<\dfrac{3}{2}\right)$에서만 미분가능하지 않다. |
| (다) 함수 $\left\lvert \lvert f(x)\rvert-f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right\rvert$은 $x=\dfrac{3}{2}$에서만 미분가능하다. |

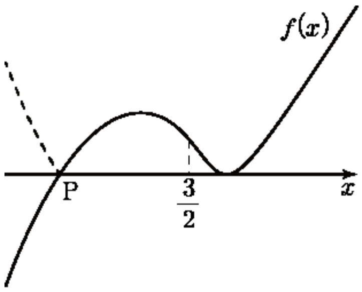
$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$의 값이 최소일 때, $f'(2a-3c+p)$의 값은? (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 상수이다.) [4점]

① $-9+\sqrt{3}$ ② $-10+\sqrt{3}$ ③ $11-\sqrt{3}$ ④ $12-\sqrt{3}$ ⑤ $13-\sqrt{3}$

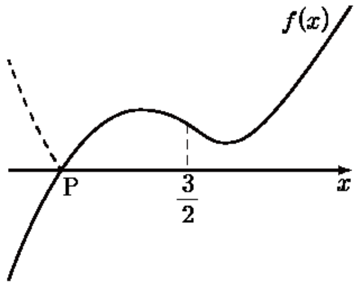
[풀이 1]

조건 (가)에 의해서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{2}$에서 미분가능하고, 조건 (나)에 의하여 $x \geq \dfrac{3}{2}$일 때, $f(x) \geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 네 가지 경우로 나타낼 수 있다.

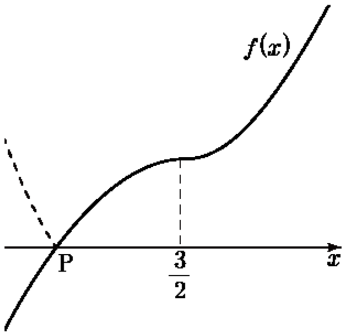
①



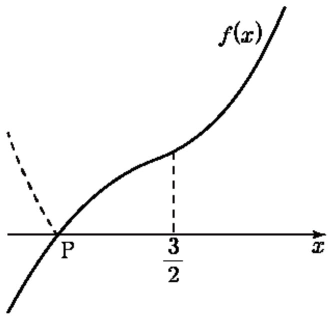

②




③



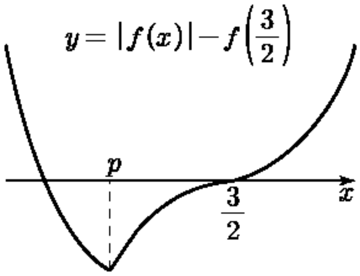

④

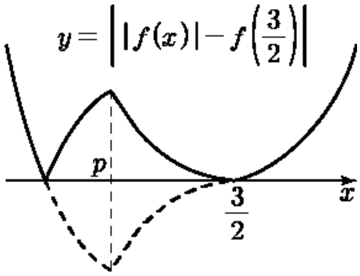



$f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$의 범위는 ① $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$ ② $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$ ③ $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ ④ $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$임을 알 수 있다.

조건 (다)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 ③과 같음을 알 수 있다.
또한 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$이면 조건 (나)를 만족시키는 $p$는 존재하지 않으므로 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$이어야 된다. 즉, $\left||f(x)|-f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right|$의 $x=\dfrac{3}{2}$에서의 미분계수는 0이어야 한다.

그래프의 개형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.




$f(x)=\begin{cases} -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+k & \left(x<\frac{3}{2}\right) \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+k & \left(x \geq \frac{3}{2}\right) \end{cases}=\begin{cases} -x^2+3x-\frac{9}{4}+k & \left(x<\frac{3}{2}\right) \\ x^2-3x+\frac{9}{4}+k & \left(x \geq \frac{3}{2}\right) \end{cases}$ 이므로

$2a=3,\ a=\frac{3}{2}$ 이고 $2b=-\frac{9}{4}+k,\ b=-\frac{9}{8}+\frac{k}{2}$

$3c=-3,\ c=-1$ 이고 $3d=\frac{9}{4}+k,\ d=\frac{3}{4}+\frac{k}{3}$

조건에서 $f\left(\frac{3}{2}\right)=k>0$ 이므로 $k$는 양의 정수이다.

$k$의 최솟값이 $\frac{3}{2}$ 이므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 임을 알 수 있다.

그러면 $f(p)=-\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0$ 에서 $\left(p-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$ 임을 알 수 있다.

$p-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ , $p=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ 이므로 $p=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 또는 $p=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

$p<\frac{3}{2}$ 이므로 $p=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$2a-3c+p=3-(-3)+\frac{3-\sqrt{3}}{2}=6+\frac{3-\sqrt{3}}{2}=\frac{15-\sqrt{3}}{2}$ ,

$f'(2a-3c+p)=f'\left(\frac{15-\sqrt{3}}{2}\right)$

$x>\frac{3}{2}$ 일 때, $f'(x)=2x-3$

$f'\left(\frac{15-\sqrt{3}}{2}\right)=2\times\left(\frac{15-\sqrt{3}}{2}\right)+3=15-\sqrt{3}-3=12-\sqrt{3}$

따라서 $f'(2a-3c+p)=12-\sqrt{3}$

**[풀이2]**

함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$ 에서 미분가능하므로

$x<\frac{3}{2}$에서 $f(x)=-x^2+2ax+2b$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}+3a+2b$

$x\geq\frac{3}{2}$에서 $f(x)=x^2+3cx+3d$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}+\frac{9}{2}c+3d$

$-\frac{9}{4}+3a+2b=\frac{9}{4}+\frac{9}{2}c+3d$

$x<\frac{3}{2}$에서 $f'(x)=-2x+2a$, $f'\left(\frac{3}{2}\right)=-3+2a$

$x\geq\frac{3}{2}$에서 $f'(x)=2x+3c$, $f'\left(\frac{3}{2}\right)=3+3c$

$-3+2a=3+3c$, $2a-3c=6$

그런데 문제의 조건에서 $f\left(\frac{3}{2}\right)$에서 최솟값을 갖는다고 했으므로

$x<\frac{3}{2}$에서 $f(x)=-(x-a)^2+a^2+2b$, $x=a=\frac{3}{2}$임을 알 수 있다.

$a=\frac{3}{2}$, $2\times\frac{3}{2}-3c=6$, $c=-1$이다.

즉, $f(x)=\begin{cases}-x^2+3x+2b & \left(x<\frac{3}{2}\right)\\ x^2-3x+3d & \left(x\geq\frac{3}{2}\right)\end{cases}$로 나타낼 수 있다.

(나)에 대한 조건은 (풀이1)에서와 같이

$f(p)=-\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0$에서 $\left(p-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$임을 알 수 있다.

$p-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $p=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$이므로 $p=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 또는 $p=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

$p<\frac{3}{2}$이므로 $p=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$이다.

$x>\frac{3}{2}$일 때, $f'(x)=2x-3$

$f'\left(\frac{15-\sqrt{3}}{2}\right)=2\times\left(\frac{15-\sqrt{3}}{2}\right)+3=15-\sqrt{3}-3=12-\sqrt{3}$

따라서 $f'(2a-3c+p)=12-\sqrt{3}$