[7] 좌표평면 위에서 원의 자취와 벡터의 평행 성질활용

좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(8, 6)에 대하여 점 P가

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$

을 만족시킨다.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [1)]

① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

[풀이]

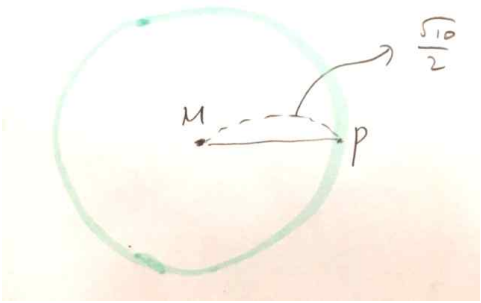
---

1) [풀이]

① $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$에 대한 식은 다음과 같이 나타낸다.

$2\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right|=\sqrt{10}$, $\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$이므로

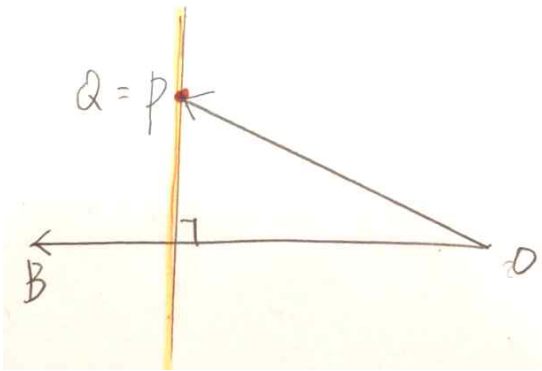
즉, $\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right|=|\overrightarrow{PM}|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$다음 그림과 같이 점 P가 원의 자취이고, M을 중심으로 하는 반지름 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$인 원이다..



② $|\overrightarrow{OB}|$의 길이는 원점 O(0, 0)과 점 B(8, 6)사이의 거리 이므로

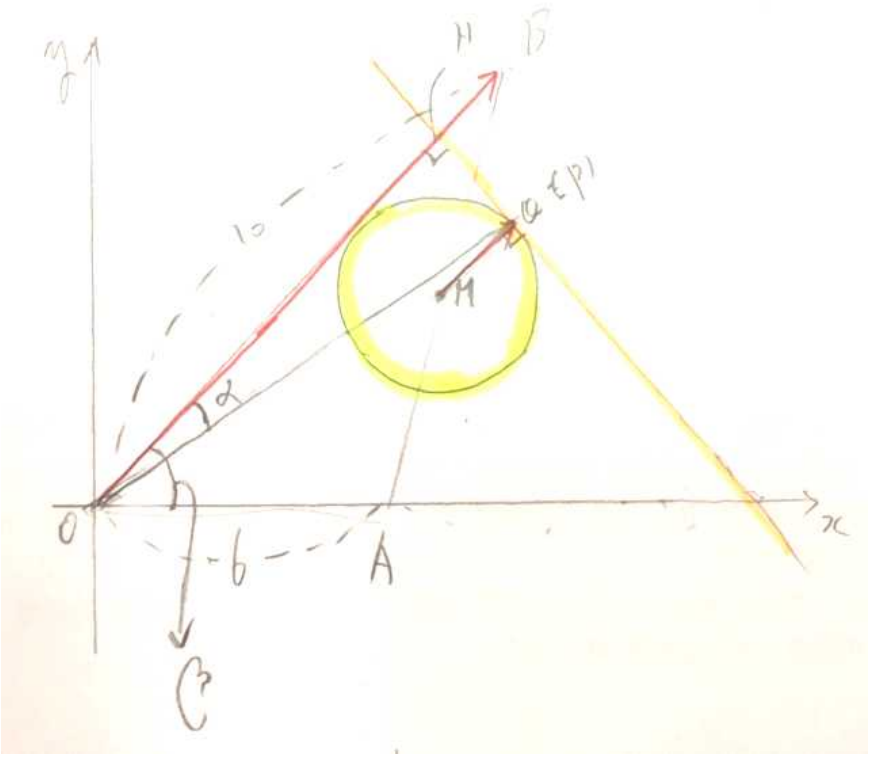
$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$, 문제의 조건 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$에서 $|\overrightarrow{OP}|$의 값이 최대일 때, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대임을 알 수 있다.

그러면 점 P(Q)을 지나는 접선과 수직일 때, 최대임을 알 수 있다.



③ 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때,

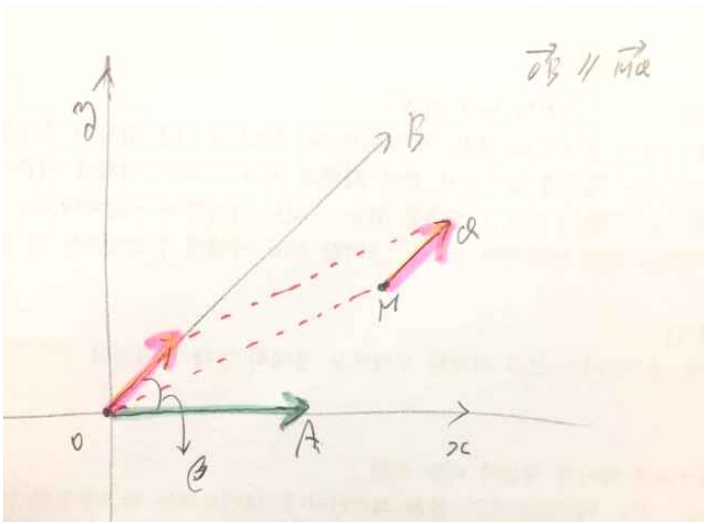
$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{6^2} = 6$, $\overrightarrow{MQ} // \overrightarrow{OB}$임을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (6,\ 0) \cdot (8,\ 6) = 6 \times 8 + 0 \times 6 = 48$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos\beta = 6 \times 10 \times \cos\beta = 48$이므로

$\cos\beta = \frac{4}{5}$이다. 여기서 β는 $\overrightarrow{MQ}$을 평행이동 시켰을 때 $\overrightarrow{OB}$의 위치와 같으므로



$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ}$에서의 $\cos\beta$와 같음을 위의 그림을 통해서 확인할 수 있다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{MQ}}| \cos\beta = 6 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{12\sqrt{10}}{5}$$