수능
수학
독본

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

구성

수능 수학독본은 ‘기본개념 편’과 ‘실전이론 편’으로 구성됩니다.

▸ 기본개념 편

기본개념 편의 구성은 다음과 같습니다.

교과서 개념 + 문제(예제/문제+연습문제) + 추가적인 설명(✪)

교과서 개념마다 이에 대한 교과서 예제/문제, 연습문제가 따라오며, 교과서 개념과 문제에 대한 이해를 돕는 설명이 추가됩니다. 추가적인 설명은 기호 ✪로 구별하였습니다.

즉, 교과서 전체 + 선생님이 추가하는 설명(✪)으로 구성됩니다.

▸ 실전이론 편

실전이론 편에서는 교과서와 수능/평가원/교사경 기출문제에서 추론 가능한

실전이론, 문제풀이도구, 문제해결전략

을 정리하였습니다.

실전이론 편은 주제별로 구성되어 있으며, 각 주제에 대하여 이론, 도구, 전략(실전에서 문제를 독해하고 해결하는 구체적인 방법)을 제시하였습니다.

실전이론 편의 수록 문항은

- 수능/모평/교사경 기출
- 과거 본고사/논구술 기출 (수능에 맞도록 변형함)

중에서 개념적으로, 문제해결능력 적으로 중요한 문제들입니다.

학습법

▸ 학습순서

• 3점부터 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편 ⇨ 기출 (2, 3점) ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (4점) ⇨ 교과서, 기출 복습

교과서의 기본개념부터 시작하는 경우입니다. 대부분의 4등급 이하의 수험생들이 여기에 해당합니다.

• 쉬운 4점부터 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편 ⇨ 기출 (2, 3점) ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (4점) ⇨ 교과서, 기출 복습

실전이론을 미리 배우고 어려운 기출을 푸는 경우입니다. 3등급 이하의 수험생들에게는 이 방법이 현실적일 것입니다. (교과서 개념을 모두 안다면 기본개념 편 전체를 학습할 필요 없이 본문의 ✪에 해당하는 추가설명만 공부해도 좋습니다.)

• 1등급/만점 결정 문항이 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편(✪) ⇨ 기출 (2, 3점) ⇨ 기출 (4점) 최대한 ⇨ 실전이론 ⇨ 기출(킬러) ⇨ 교과서, 기출 복습

어려운 기출을 최대한 스스로의 힘으로 풀고 나서 실전이론을 나중에 배우는 경우입니다. 대부분의 2등급 수험생들이 여기에 해당합니다. (기본개념 편의 경우 본문의 ✪에 해당하는 추가설명만 공부해도 좋습니다.)

• 1등급/만점 결정 문항도 몇 개를 제외하면 다 풀리는 경우

기본개념 편(✪) ⇨ 기출 (2, 3점) ⇨ 기출 (4점/킬러) 최대한 ⇨ 실전이론 ⇨ 기출(킬러) ⇨ 교과서, 기출 복습

거의 모든 기출을 스스로의 힘으로 풀고 나서 스스로 생각하기 힘든 실전이론을 나중에 배우는 경우입니다. 대부분의 1등급 수험생들이 여기에 해당합니다. (기본개념 편의 경우 본문의 ✪에 해당하는 추가설명만 공부해도 좋습니다.)

실전이론을 학습하기 전에 기출문제를 스스로의 힘으로 풀어서 문제해결능력을 키워두는 편이 낫습니다. 스스로의 힘으로 풀 수 있는 기출문제의 수가 많은 상태에서 실전이론을 학습한다면 좀 더 많은 것을 얻어갈 수 있을 것입니다.

▸ 이동훈 기출문제집과의 병행

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ (교과서 예제 또는 그 수준의 문제)
○○ (교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제)
○○○ (교과서 예제 또는 연습문제 이상의 수준의 문제) – 상대적으로 난이도 낮음 3~4등급 이하
●●● (교과서 예제 또는 연습문제 이상의 수준의 문제) – 상대적으로 난이도 높음 (준킬러 포함) 2~3등급
★★★ (교과서 예제 또는 연습문제 이상의 수준의 문제) – 최고난문 1등급/만점

○, ○○는 교과서 예제/문제, 중대단원 연습문제와 유형 및 난이도가 같습니다.
○○○은 쉬운 4점, ●●●은 어려운 4점, ★★★은 1등급/만점 결정 난문입니다.

• 3점부터 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편 ⇨ 기출 (○, ○○) ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (○○○, ●●●) ⇨ 기출 (★★★) ⇨ 교과서, 기출 복습

• 쉬운 4점부터 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편 ⇨ 기출 (○, ○○) ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (○○○, ●●●) ⇨ 기출 (★★★) ⇨ 교과서, 기출 복습

• 1등급/만점 결정 문항이 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편(✪) ⇨ 기출 (○, ○○, ○○○) ⇨ 기출 (●●●) 최대한 ⇨ 실전이론 ⇨ 기출(●●●, ★★★) ⇨ 교과서, 기출 복습

• 1등급/만점 결정 문항도 몇 개를 제외하면 다 풀리는 경우

기본개념 편(✪) ⇨ 기출 (○, ○○, ○○○) ⇨ 기출 (●●●) ⇨ 기출(★★★) 최대한 ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (★★★) ⇨ 교과서, 기출 복습

목차

수열의 극한

1 수열의 극한

학습목표

- 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

▸ 수열의 수렴

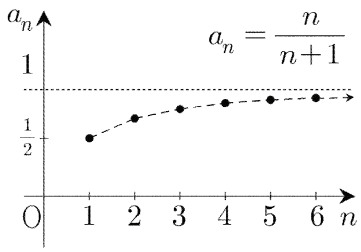
수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떻게 변하는지 알아보자.

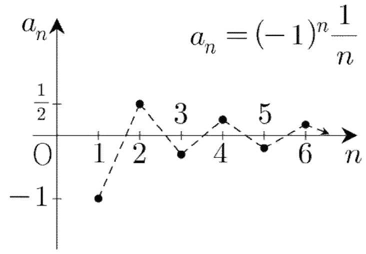
예를 들어, 두 수열

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} : \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots$$

$$\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\} : -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^n\frac{1}{n},\ \cdots$$

에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 것을 그래프로 나타내면 다음과 같다.





위의 그래프에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$의 일반항 $\frac{n}{n+1}$의 값은 1에 한없이 가까워지고, 수열 $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$의 일반항 $(-1)^n\frac{1}{n}$의 값은 음, 양의 부호를 교대로 가지면서 0에 한없이 가까워진다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다.

이때, α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \text{ 또는 } n\to\infty\text{일 때, } a_n\to\alpha$$

lim은 극한을 뜻하는 limit의 약자이고, '리미트' 라고 읽는다. 그리고 $n\to\infty$은 n이 한없이 커진다는 의미이다. 이때, ∞는 수(실수)가 아니다.

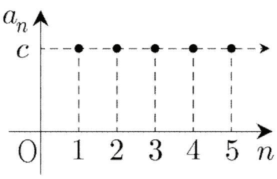
와 같이 나타낸다. 이때, ∞를 무한대라고 읽는다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$이다.

특히, 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=c$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 c에 수렴한다고 하고, 기호로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c=c$$

와 같이 나타낸다.



예제 1

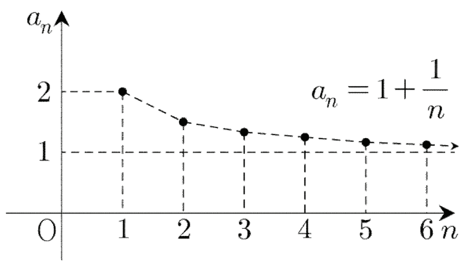
다음 수열의 극한값을 구하여라.

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots$$

풀이

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=1+\frac{1}{n}$$



위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 1에 한없이 가까워지므로, 이 수열은 1에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

답 1

문제 1

p.4

다음 수열의 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

(1) $1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n^2},\ \cdots$

(2) $-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \cdots,\ (-1)^n\dfrac{1}{2^{n-1}},\ \cdots$

(3) $2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots,\ 2,\ \cdots$

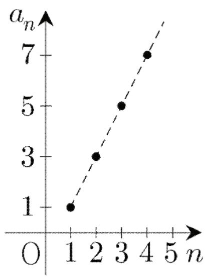
▶ 수열의 발산

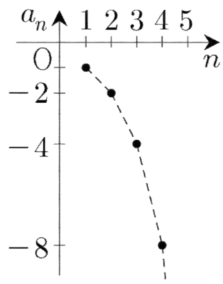
수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수렴하지 않는 경우를 알아보자.

예를 들어, 두 수열

$$\{2n-1\} : 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots$$
$$\{-2^{n-1}\} : -1,\ -2,\ -4,\ -8,\ \cdots,\ -2^{n-1},\ \cdots$$

에서 n이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 것을 그래프로 나타내면 다음과 같다.





위의 그래프에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{2n-1\}$의 일반항 $2n-1$의 값도 한없이 커지고, 수열 $\{-2^{n-1}\}$의 일반항 -2^{n-1}의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다. 따라서 두 수열은 모두 일정한 수에 가까워지지 않는다.

이와 같이 어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다. 일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값도 한없이 커지면 이 수열은 양의 무한대로 발산한다 하고, 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \text{ 또는 } n\to\infty \text{일 때, } a_n\to\infty$$

와 같이 나타낸다.

또, 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 이 수열은 음의 무한대로 발산한다 하고, 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \text{ 또는 } n\to\infty \text{일 때, } a_n\to-\infty$$

와 같이 나타낸다.

즉, $\lim_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(-2^{n-1})=-\infty$이다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$는 각각 극한값이 ∞, $-\infty$라는 뜻이 아니다. 이때는 극한값이 없다고 한다.

보기

수열 $\{n^2\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 n^2의 값도 한없이 커지므로

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

이다.

문제 2

p.4

다음 수열이 발산함을 확인하여라.

(1) $3,\ 0,\ -3,\ \cdots,\ 6-3n,\ \cdots$

(2) $-9,\ -8,\ -6,\ \cdots,\ 2^{n-1}-10,\ \cdots$

한편, 수렴하지도 않고 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지 않는 수열이 있다.

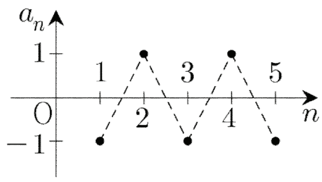
예를 들어, 수열

$$\{(-1)^n\} : -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$$

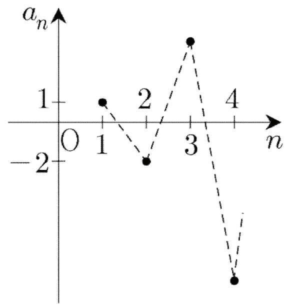
$$\{(-2)^{n-1}\} : 1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots$$

에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 것을 그래프로 나타내면 다음과 같다.

$a_n=(-1)^n$



$a_n=(-2)^{n-1}$



위의 그래프에서 n이 한없이 커지면 두 수열 $\{(-1)^n\}$, $\{(-2)^{n-1}\}$은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않음을 알 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 수에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 이 수열은 진동한다고 한다.

이상에서 수열의 수렴과 발산에 대하여 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산〉

❶ 수렴 : $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 일정한 값)

❷ 발산 : $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n=\infty & \text{(양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n\to\infty} a_n=-\infty & \text{(음의 무한대로 발산)} \\ \text{진동} & \end{cases}$

문제 3

p.5

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\dfrac{2}{2n-1}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$

(3) $\left\{3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ (4) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$

2 수열의 극한값의 계산

학습목표

- 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

▸ 수열의 극한에 대한 기본 성질

다음의 문제를 함께 풀어보자.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$, $b_n = \dfrac{n+1}{n}$이고

$c_n = a_n + b_n$, $d_n = a_n - b_n$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한값을 각각 구하여라.

(2) 수열 $\{c_n\}$의 극한값을 구하고, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한값의 합과 비교하여라.

(3) 수열 $\{d_n\}$의 극한값을 구하고, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한값의 차와 비교하여라.

[풀이]

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n} = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$

(←두 일반항 a_n, b_n에 대한 그래프는 생략한다.)

(2) $c_n = \dfrac{3n}{n} = 3$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$

(←일반항 c_n에 대한 그래프는 생략한다.)

이때, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$(즉, $3 = 2 + 1$)임을 알 수 있다.

(3) $d_n = \dfrac{n-2}{n}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n} = 1$

(←일반항 d_n에 대한 그래프는 생략한다.)

이때, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$(즉, $1 = 2 - 1$)임을 알 수 있다.

이제 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항의 합, 차, 실수배, 곱, 몫을 항으로 하는 수열의 극한에 대하여 알아보자.

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

일 때, 두 수열의 각 항의 합을 항으로 하는 수열 $\{a_n + b_n\}$은 수렴하며, 그 극한값은 두 수열의 극한값의 합과 같다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$$

이다.

일반적으로 수렴하는 수열의 극한에 관하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

기본개념

〈수열의 극한에 관한 기본 성질〉

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때

❶ $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (단, k는 상수)

❷ $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

❸ $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta$

❹ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

❺ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

참고

수열의 극한에 대한 기본 성질은 두 수열이 모두 수렴하는 경우에만 성립한다. 다시 말하면 두 수열 중에서 하나라도 발산하면 위의 성질이 항상 성립하는 것은 아니다.

보기

'$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$' 임을 이용하면 다음의 극한값을 구할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}5-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}5-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5-2\cdot0=5$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}+1}{3-\frac{2}{n}}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+1}{3-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{0+1}{3-2\cdot0}=\frac{1}{3}$$

위와 같이 수열의 극한값을 구할 때, '$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$' 은 자주 사용되므로 반드시 기억해두어야 한다. 이때, 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프의 개형과 함께 기억해두는 편이 낫다.

문제 4

p.6

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(4-\frac{3}{n}\right)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+2}{3-\frac{5}{n}}$

문제 5

p.6

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수이고, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)일 때, 다음 수열의 극한값을 α, β로 나타내어라.

(1) $\{a_n-2\}$　　(2) $\{3a_n+4b_n\}$

(3) $\{5a_nb_n\}$　　(4) $\left\{\frac{a_n-1}{2b_n^2}\right\}$

▶ 수열의 극한값의 계산

복잡한 수열은 먼저 간단한 수열의 합(+), 차(−), 곱(×), 몫(÷)으로 고치고, 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이용하여 그 극한값을 구할 수 있다.

특히 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

[1] $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구할 때, a_n, b_n이 다항식이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\pm\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\pm\infty$인 경우에는 b_n의 최고차항으로 분자, 분모를 나누어 계산한다. (단, 복호동순은 아니다.)

[2] $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$의 값을 구할 때, a_n-b_n이 무리식이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$인 경우에는 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화하여 계산한다.

✪ 복호동순이란?
둘 이상의 복부호(±)를 사용하여 식을 쓸 때, 복부호를 위로부터 같은 순서로 사용하는 방법이다. 예를 들어
$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
에서 좌변이 '+'이면 우변도 '+'를, 좌변이 '−'이면 우변도 '−'를 취하게 된다.

예제 2

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{3n^2+2n-1}$　　　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

풀이

(1) 분자, 분모를 n^2으로 나누면
(←즉, 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{3n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{2-0}{3+0-0}=\frac{2}{3}$$

$(\because \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0)$

$\frac{\infty}{\infty}=1$로 계산하지 않도록 유의하자. ∞는 수가 아니므로 이 등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

(2) 분자, 분모에 $\sqrt{n^2+n}+n$을 곱하며 분자를 유리화하면
(←즉, $\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{1}$으로 두고 분자를 유리화하면)

$\infty-\infty=0$으로 계산하지 않도록 유의하자. ∞는 수가 아니므로 이 등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

분자, 분모를 n으로 나누면

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

($\because$ 분모에서 $\frac{1}{n}\sqrt{n^2+n}=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\sqrt{n^2+n}$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2(n^2+n)}=\sqrt{\frac{1}{n^2}(n^2+n)}=\sqrt{1+\frac{1}{n}}$)

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

✪ 수열의 극한과 속도(1)

(1)을 빠르게 계산하는 방법을 알아보자.

$n\to\infty$일 때, 이차함수가 일차함수보다 훨씬 빠르게 증가하므로

즉, $2n^2\gg 3n$이므로 (분자) $\approx 2n^2$

$n\to\infty$일 때, 이차함수가 일차함수보다 훨씬 빠르게 증가하므로

즉, $3n^2\gg 2n-1$이므로 (분모) $\approx 3n^2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{3n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

이때, $\frac{2}{3}$는 분자, 분모의 최고차항의 계수의 비와 같다.

✪ 수열의 극한과 속도(2)

(2)에 대하여 좀 더 생각해보자.

$n\to\infty$일 때, 이차함수가 일차함수보다 훨씬 빠르게 증가하므로

즉, $n^2\gg n$이므로 $\sqrt{n^2+n}\approx\sqrt{n^2}=n$이다.

그러므로 $n\to\infty$일 때, $\sqrt{n^2+n}$은 사실상 n에 대한 일차식으로 간주할 수 있다.

$n\to\infty$일 때, $\sqrt{n^2+n}-n=$(일차식)$-$(일차식)의 꼴이다. 이때, 두

일차식의 계수는 같다. 만약 두 일차식의 계수가 같지 않으면 수렴하지 않는다. 왜냐하면 두 일차식의 계수가 다르면 증가하는 속도가 다르므로 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하기 때문이다.

그리고 $n\to\infty$일 때, $\sqrt{n^2+n}-n \approx n-n=0$으로 두면 극한값을 구할 수 없으므로 주의해야 한다.

요컨대 일반항 $\sqrt{n^2+n}-n=$(일차식)$-$(일차식)에서 두 일차식의 계수가 같으므로 이 수열이 수렴함을 기대할 수 있다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$(단, α는 0이 아닌 실수), $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$일 때,

$$\alpha>0\text{이면 } \lim_{n\to\infty} a_n b_n=\infty,$$

$$\alpha<0\text{이면 } \lim_{n\to\infty} a_n b_n=-\infty$$

임이 알려져 있다.

〈문제6〉
✪ 이 문제를 풀 때, (1), (2), (5)를 빠르게 계산하는 방법도 생각해보자. (해설집의 [참고]에 이를 적어두었다.)

문제 6

p.6

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-n+4}{3n+2}$　　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+2n-1}{4n^3+3}$

(3) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n}-n)$　　(4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)}$　　(6) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$

〈문제7〉
✪ 이 문제를 풀 때, (2), (3)을 빠르게 계산하는 방법도 생각해보자. (해설집의 [참고]에 이를 적어두었다.)

연습 7

p.7

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

〈문제8〉
✪ 이 문제를 풀고 나서 빠른 풀이에 대하여 고민해보자. 즉, 풀이과정을 종이에 쓰지 않고, 머릿속 계산만으로 답을 구하는 방법을 찾아보자.

연습 8

p.7

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{2n-1}=4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

〈문제9〉
✪ 수열의 극한 단원인 만큼 수열 단원과 내적 결합된 문제가 수능에 자주 출제된다. 이 문제가 한 예이다.

연습 9

p.8

첫째항이 0이고, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+2}}-\sqrt{S_n})$의 값을 구하여라.

예제 3

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{n^2-n+1\}$　　　(2) $\left\{\frac{-n^2+3n}{2n-1}\right\}$

풀이

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

(←전체 식을 n^2으로 묶는 이유는 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$임을 이용하기 위해서이다. 이때, 최고차항으로 묶어야 한다.)

여기서 $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)=\infty$

따라서 수열 $\{n^2-n+1\}$은 양의 무한대로 발산한다.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+3n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n+3}{2-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{-1+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)$

(←즉, $n\cdot$(수렴)의 꼴로 식을 변형한 것이다.)

여기서 $\lim_{n\to\infty} n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-1+\dfrac{3}{n}}{2-\dfrac{1}{n}}=-\dfrac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+3n}{2n-1}=-\infty$$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{-n^2+3n}{2n-1}\right\}$은 음의 무한대로 발산한다.

답 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 음의 무한대로 발산

✪ 수열의 극한의 기하학적 관찰

(1)에서 $n\to\infty$일 때, $n^2-n+1\to\infty$임을 함수 $y=x^2-x+1$의 그래프의 개형에서 알 수 있다. 이처럼 그림(그래프의 개형)을 이용하면 직관적으로 빠르게 답을 구할 수 있는 경우가 많다. 위의 풀이는 이를 수식으로 엄밀하게 증명한 것이다.

✪ 수열의 극한과 속도(3)

일반항 a_n, b_n이 다항식일 때, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$의 수렴과 발산에 대하여 알아보자.

다항식 a_n, b_n의 최고차항의 계수를 각각 a, b라고 하면

(a_n의 차수)>(b_n의 차수):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\infty(ab>0) \text{ 또는 } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=-\infty(ab<0)$$

(a_n의 차수)=(b_n의 차수):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$$

(a_n의 차수)<(b_n의 차수):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=0$$

각각에 대한 예를 들면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{-3n^2-1}=-\infty,\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{3n^2+n}=\frac{2}{3},\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^3+n}=0$$

〈문제10〉
✪ '차수와 계수만 보고도' 계산 없이 답을 구할 수 있어야 한다.

문제 10

p.8

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\left\{\dfrac{n^2-2n+5}{2n+1}\right\}$ (2) $\{n^2-4n^3\}$

〈문제11〉
✪ 이 문제에서 a의 값이 바로 보이는가? 그렇다면 수열의 극한에서 '차수와 계수' 에 대한 감각을 갖게 된 것이다.

연습 11

p.8

다음 등식이 성립하도록 상수 a, b, c의 값을 정하여라.

$\lim_{n\to\infty} n\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\right\}=c$

▸ 수열의 극한에 대한 대소 관계

수렴하는 수열의 극한값의 대소 관계에 대하여 다음과 같은 성질이 성립하는 것이 알려져 있다.

기본개념

〈수열의 극한의 대소 관계〉

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$($\alpha$, β는 실수)일 때

❶ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

❷ 수열 $\{c_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

참고

(1) ❶에서 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$인 경우도 있다.

(2) ❶에서 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{3}{n}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$인 경우도 있다.

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$일 때, $\alpha = \beta$인 경우도 있다.

예제 4

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$2n-1 < na_n < 2n+3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

풀이

문제에서 주어진 부등식을 변형하면

$$\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{2n+3}{n}$$

(←수열 a_n의 극한값을 구하라고 하였으므로 na_n을 a_n으로 변형하기 위하여 각 변을 n으로 나눈 것이다. 이처럼 식의 변형은 문제에서 값을 구하라는 식의 꼴을 보고 하면 된다.)

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n} = 2$이므로 수열의 극한의 대소 관계 ❷에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

답 2

문제 12 p.9

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$2n^2-n < (n^2+1)a_n < 2n^2+n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

문제 13 p.9

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$2n-1 < na_n < \sqrt{4n^2+n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{n+3}$의 값을 구하여라.

〈문제14〉
✪ 이 문제의 결과는 암기해두는 것이 좋다. 해설집의 풀이를 스스로 쓸 수 있을 때까지 여러 번 반복해서 써볼 것을 권한다.

문제 14

p.9

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$임을 보여라.

연습 15

p.9

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1,\ \lim_{n\to\infty}a_nb_n=-2$$

일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2-b_n^2)$의 값을 구하여라. (단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>b_n$이다.)

연습 16

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n - \frac{3n^2-2n}{n+1}\right)=5$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

✪ 치환을 이용한 수열의 극한값의 계산

교과서 본문에서는 '치환을 이용하여 수열의 극한을 구하는 방법'에 대해서는 설명하지 않는다. 위의 문제에서 이를 설명하면 다음과 같다.

문제에서 복잡한 일반항 $na_n - \frac{3n^2-2n}{n+1}$이 주어졌으므로, 이를 새로운 일반항 b_n으로 치환하면 즉, $na_n - \frac{3n^2-2n}{n+1} = b_n$으로 두면 아래의 두 식을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 5,\ a_n = \frac{b_n}{n} + \frac{3n-2}{n+1}$$

이제 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 문제를 해결하면 된다.

이처럼 복잡한 일반항이 주어졌을 때, 새로운 일반항으로 치환하면 극한값을 편하게 구할 수 있다.

연습 17

p.10

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-1}{2a_n+1}=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

✪ 수렴하는 수열의 극한값의 계산

문제에서 수렴하는 수열 $\{a_n\}$이라는 표현이 주어지면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 상수)로 둔다. 위의 문제를 일단 이 방법으로 풀고, 또 다른 방법이 없는지를 고민해보자.

〈연습18〉

✪ 최근 수능에서는 수열의 극한에 대한 참, 거짓 판단 문제가 거의 출제되고 않지 있다. 만약 이 문제가 잘 풀리지 않는다면 해설집을 바로 읽어도 괜찮다.

연습 18

p.10

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판단하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$이고 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

3 등비수열의 극한

학습목표

- 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

▸ 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

다음의 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 생각하자.

$$a_n:\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ \cdots,\ 10^n,\ \cdots$$

$$b_n:\ \frac{1}{10},\ \left(\frac{1}{10}\right)^2,\ \left(\frac{1}{10}\right)^3,\ \cdots,\ \left(\frac{1}{10}\right)^n,\ \cdots$$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다시 쓰면

$$a_n:\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ 100000,\ \cdots$$

$$b_n:\ 0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001,\ 0.00001,\ \cdots$$

여기서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값은 한없이 커지고 b_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

임을 알 수 있다.

✪ 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산 (예를 통한 이해)

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 판단하자.

$r>1$인 경우: 예를 들어 $r=2$이면 $n\to\infty$일 때, $2^n\to\infty$

$r=1$인 경우: $n\to\infty$일 때, $1^n\to 1$

$-1<r<1$인 경우:

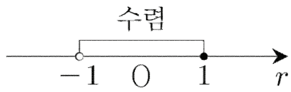
예를 들어 $r=-\frac{1}{2}$이면 $n\to\infty$일 때, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n\to 0$

$r=-1$인 경우: $n\to\infty$일 때, r^n은 1 또는 -1의 값을 갖는다. 즉, 진동하므로 발산한다.

$r<-1$인 경우: 예를 들어 $r=-2$이면 $n\to\infty$일 때, r^n은 부호가 바뀌면서 절댓값이 한없이 커진다. 즉, 진동하므로 발산한다.

따라서 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1 < r \leq 1$임을 알 수 있다.

아래와 같이 수직선에서 이를 기억해두면 좋다.



만약 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 조건이 생각하지 않으면

$$r=2,\ r=1,\ r=-\frac{1}{2},\ r=-1,\ r=-2$$

로 두고, 수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 생각해보면 된다.

✪ 아래의 증명과정은 이해하기 쉽지 않을 수 있다. 그래도 계산과정을 꼼꼼하게 따라가 보자.

이제 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 공비 r의 값에 따라 알아보자.

(ⅰ) $r > 1$일 때

$r=1+h(h>0)$라고 놓으면 수학적 귀납법에 의하여

$$r^n=(1+h)^n > 1+nh \ (n \geq 2)$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$이다.

(ⅱ) $r=1$일 때

수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 1이므로

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

(ⅲ) $-1 < r < 1$일 때

① $r=0$이면 수열의 모든 항이 0이므로

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0$$

② $r \neq 0$이면 $\frac{1}{|r|} > 1$이므로 (ⅰ)에 의하여

(←예를 들어 $r=-0.2$이면 $\frac{1}{|r|}=5>1$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty \qquad (\leftarrow \because |a^n|=|a|^n)$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{|r^n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{|r|}\right)^n}=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이다.

($\because$ $a_n > 0$일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$이면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$임이 알려져 있다.

예를 들어 매우 큰 수 10^9의 역수 0.000000001은 0에 매우 가까운 수이다.

그리고 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$이면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.)

(iv) $r \le -1$일 때

① $r = -1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이므로 진동한다.

② $r < -1$이면 $|r| > 1$이므로 $\lim_{n \to \infty} |r^n| = \infty$이고 r^n의 부호가 교대로 변하므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산〉

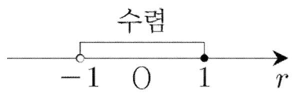
❶ $r > 1$일 때, $\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$ (발산)

❷ $r = 1$일 때, $\lim_{n \to \infty} r^n = 1$ (수렴)

❸ $-1 < r < 1$일 때, $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ (수렴)

❹ $r \le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

즉, 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은
$-1 < r \le 1$이다.



보기

(1) 등비수열 $\{r^n\}$이 $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ \cdots$일 때
$r = -\frac{1}{2}(-1 < r < 1)$이므로 $\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$이다.

(2) 등비수열 $\{r^n\}$이 $-3,\ 9,\ -27,\ \cdots,\ (-3)^n,\ \cdots$일 때
$r = -3(r < -1)$이므로 진동한다.

〈문제19〉
✪ (3), (4)에서 주어진 일반항을 r^n의 꼴로 변형하면 된다.

문제 19

p.11

다음 등비수열의 수렴, 발산을 조사하고 수렴하는 경우에는 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\left(-\frac{5}{4}\right)^n\right\}$　　(2) $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

(3) $\left\{\frac{(\sqrt{3})^n}{2^{2n}}\right\}$　　(4) $\left\{\frac{3^{2n}}{5^n}\right\}$

문제 20

p.11

다음 등비수열이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\{(2x+1)^n\}$　　(2) $\{(x^2-x-1)^n\}$

〈문제21〉
✪ 두 수열의 공비를 찾기 힘들었다면, 해설집의 [참고]를 읽어보도록 하자.

문제 21

p.11

두 등비수열 $\{x^{2n-1}\}$, $\{(1+x)^{n-1}\}$이 동시에 수렴하도록 하는 실수 x값의 범위를 구하여라.

예제 5

수열 $\left\{\dfrac{4^{n+1}-2^n}{4^n+3^{n-1}}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

풀이

분모, 분자를 4^n으로 나누면

(←분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분자와 분모를 나눈다.

왜냐하면 $n\to\infty$일 때, 4^n이 3^n보다 훨씬 빠르게 증가하므로, 다시 말하면 밑의 절댓값이 큰 쪽이 더 빠르게 증가하므로 분모의 증가 속도를 결정하는 것은 3^n이 아니라 4^n이다.)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-2^n}{4^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{4+0}{1+0}=4$$

$\left(\because \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0\right)$

따라서 주어진 수열은 4에 수렴한다.

답 4에 수렴

✪ 수열의 극한과 속도(4)

증가 속도의 관점에서 위의 문제를 빠르게 풀어 보자.

$n\to\infty$일 때, $4^n\gg3^n\gg2^n$에서 $4^n\gg3^{n-1}$, $4^{n+1}\gg2^n$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-2^n}{4^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{4^n}=\lim_{n\to\infty}4=4$$

문제 22 p.11

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고 수렴하는 경우에는 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}(5^n-6^n)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{4^n+3^n}$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{3^n-1}$

(5) $\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)$ (6) $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+(-2)^n\right\}$

연습 23 p.12

공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{11}{10}$이 성립한다. 수열 $\{a_n\}$의 공비를 구하여라.

예제 6

$r>0$일 때, 수열 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하여라.

풀이

(ⅰ) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1+r^n}=\dfrac{0}{1+0}=0$

(ⅱ) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1+r^n}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(ⅲ) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

답 풀이 참조

✪ 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산 (공비의 범위)

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 판단할 때, 공비 r의 범위를 다음과 같이 다섯 가지의 경우로 구분하였다.

$$r<-1,\ r=-1,\ -1<r<1,\ r=1,\ r>1 \quad \cdots ㉠$$

이때,

$$r<-1 \text{ 또는 } r>1\text{인 경우} \to |r|>1$$
$$-1<r<1\text{인 경우} \to |r|<1$$

으로 두면 공비 r의 범위를 다음과 같이 네 가지의 경우로 구분할 수 있다.

$$|r|>1,\ |r|<1,\ r=1,\ r=-1 \quad \cdots ㉡$$

공비 r의 범위를 구분할 때, ㉠, ㉡ 중에서 편한 쪽을 택하면 되지만, 아래의 문제들은 ㉡을 따르는 것이 좋다. 그래야 풀이가 좀 더 깔끔해진다. 좀 더 설명하면

$|r|>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$,

$|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$,

$r=1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=1$,

$r=-1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n$는 진동(± 1)하므로 발산한다.

참고로 $r=1$, $r=-1$일 때에는 문제에서 주어진 식에 각각 $r=1$, $r=-1$을 대입하고, 문제에서 주어진 식이 성립하는지(예를 들어 분모가 0이 되지는 않는지), 성립한다면 일정한 수에 수렴하는지 또는 발산하는지를 판단해야 한다.

문제 24

p.12

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\left\{\dfrac{r^{n+1}}{1+r^n}\right\}$(단, $r\neq-1$)　　　(2) $\left\{\dfrac{1-r^{2n}}{1+r^{2n}}\right\}$

연습 25

p.13

수열 $\left\{\dfrac{r^n-3^n}{r^n+3^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하여라. (단, $r\neq-3$)

✪ 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산 (두 개의 공비의 대소 관계)

분모에서 주어진 두 등비수열의 공비는 각각 r, 3이다. 교과서 예제의 전형적인 풀이를 적용하기 위하여 이 두 수의 대소 관계를 따지면 다음과 같다.

$|r|>|3|$, $r=3$, $|r|<|3|$ (단, $r\neq-3$)

(←공비의 절댓값의 대소 비교임을 상기하자!)

정리하면

$$\left|\frac{r}{3}\right|>1,\ \frac{r}{3}=1,\ \left|\frac{r}{3}\right|<1\ (\text{단, } \frac{r}{3}\neq-1)$$

각 변을 $|3|$으로 나눈 이유는 $\dfrac{r}{3}=r'$로 치환하여 생각할 수 있기 때문이다. 즉,

$|r'|>1$, $r'=1$, $|r'|<1$ (단, $r'\neq-1$)

이처럼 식의 변형할 때에는 우리가 아는 모양(꼴)로 바꾸면 된다.

위의 문제를 푼 경험으로 아래의 문제를 풀어보자.

〈연습26〉
✪ 이 문제를 '속도의 관점' 에서 바라보고 머릿속에서 답이 바로 나와야 한다.

연습 26

p.13

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라. (단, a, b는 양수이다.)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$

연습 27

p.13

자연수 n에 대하여 10^n의 양의 약수의 총합을 $f(n)$이라고 할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{10^n}$의 값을 구하여라.

연습 28

p.13

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n > 0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{2023}{2024}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{3a_n+n-2}{4a_n+3n+1}$의 값을 구하여라.

✪ 답을 먼저 구하고, 이를 나중에 증명한다. (문제해결전략)

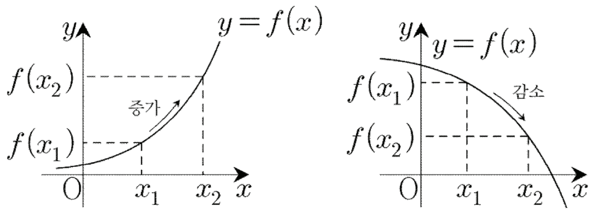
위의 문제를 풀 때에는 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2023}{2024}$으로 두어도 좋다. 즉, 문제에서 주어진 조건의 일부만을 사용하여 답을 구하는 것이다. 이처럼 복잡도가 높은 수학 문제를 풀 때에는 (가능한 정답이 나올 수밖에 없는) 일부의 조건만을 사용하여 빠르게 답을 구하고, 이 답이 참임을 나중에 증명하는 것이 보편적이다. (일반적이지는 않지만 부등호가 주어졌을 때, 보통 등호가 성립하는 경우가 답일 확률이 높다. 물론 항상 그런 것은 아니다.)

9 다항함수의 그래프

▸ 함수의 증가와 감소

• 함수의 증가와 감소의 정의

교과서 본문에서는 다음과 같이 정의한다.



함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여
$x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$
가 성립하면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여
$x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) > f(x_2)$
가 성립하면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

위의 정의는 함수 $f(x)$의 연속성, 미분가능성과 무관하다.

• 미분가능한 함수의 증가와 감소

다음 명제들의 참, 거짓을 판단해 보자.

기본개념

함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때,
그 구간의 모든 x에 대하여
❶ $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. (참)
❷ $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다. (참)

혹시 위의 두 명제가 이해되지 않는다면 기본개념 편을 다시 공부해야 한다.

위의 두 명제의 역명제는 일반적으로 성립하지 않는다. (아래)

함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 이 구간에서
❸ $f(x)$가 증가하면,
이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$ (거짓)
❹ $f(x)$가 감소하면,
이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$ (거짓)

(❸에 대한 반례는 $f(x)=x^3(f'(0)=0)$,
❹에 대한 반례는 $f(x)=-x^3(f'(0)=0)$이다.)

따라서 다음의 두 명제는 참이다.

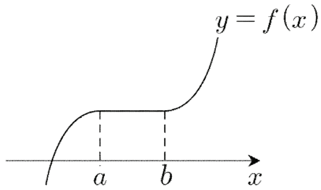
함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 이 구간에서
❺ $f(x)$가 증가하면, 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$ (참)
❻ $f(x)$가 감소하면, 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$ (참)

실전이론

$f(x)$가 다항함수일 때, 어떤 열린 구간의 모든 x에 대하여
❼ $f'(x) \geq 0$이다. $\Leftrightarrow$ 이 구간에서 $f(x)$가 증가한다. (참)
❽ $f'(x) \leq 0$이다. $\Leftrightarrow$ 이 구간에서 $f(x)$는 감소한다. (참)

왜냐하면 다항함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 상수함수가 될 수 없기 때문이다.

예를 들어 미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같다고 하자.



구간 $(a,\ b)$에서 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에서 증가하지도 감소하지도 않는다. 따라서 ❼의 $\Rightarrow$ 방향이 모든 미분가능한 함수에 대하여 성립하는 것은 아니다. 마찬가지의 이유로 ❽의 $\Rightarrow$ 방향이 모든 미분가능한 함수에 대하여 성립하는 것은 아니다.

다음의 두 명제는 거짓이다.

함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때,
이 구간의 모든 x에 대하여
❾ $f'(x) \geq 0$이다. $\Leftrightarrow$ 이 구간에서 $f(x)$가 증가한다. (거짓)
❿ $f'(x) \leq 0$이다. $\Leftrightarrow$ 이 구간에서 $f(x)$는 감소한다. (거짓)

왜냐하면 앞서 든 예처럼 어떤 열린 구간에서 함수 $f(x)$가 상수함수일 수 있기 때문이다.

▶ 함수의 극대와 극소

● 함수의 극대와 극소의 정의

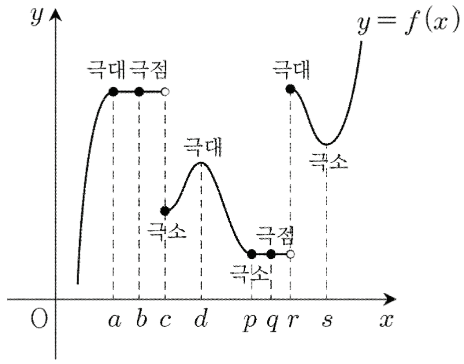
교과서 본문에서는 다음과 같이 정의한다.

$x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

$x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 된다고 하고, $f(a)$를 극솟값이라고 한다.

극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

불연속함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같다고 하자.



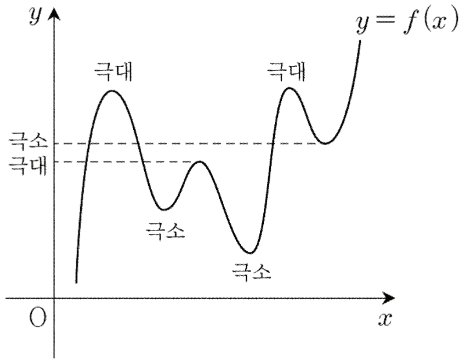
$x=a$, $x=d$, $x=r$은 함수의 극대에 대한 정의를 만족시킨다.

$x=c$, $x=p$, $x=s$는 함수의 극소에 대한 정의를 만족시킨다.

$x=b$, $x=q$는 함수의 극대에 대한 정의, 극소에 대한 정의를 모두 만족시킨다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 된다고 하고, $f(a)$를 극솟값이라고 한다.



위의 그림처럼 극댓값이 반드시 극솟값보다 큰 것은 아니다.

• 미분가능한 함수의 극값의 판정

다음 명제들의 참, 거짓을 판단해 보자.

기본개념

❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다. (참)

❷ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)=0$이면 $x=a$에서 극값을 가진다. (거짓)

(❷에 대한 반례는 $f(x)=x^3(f'(0)=0)$이다.)

한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖더라도 $f'(a)=0$이 성립하지 않을 수도 있다.

예를 들어 함수 $f(x)=|x|$는 구간 $(-1,\ 1)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(0)$이므로 극값의 정의에 의하여 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 그러나 $f'(0)$은 존재하지 않는다.

• 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정

기본개념

미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서

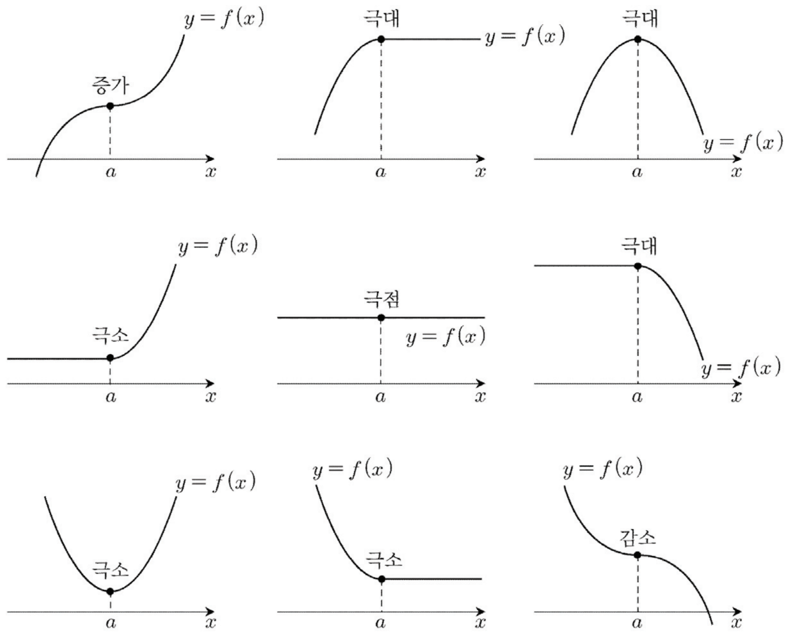
❶ $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면

$f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.

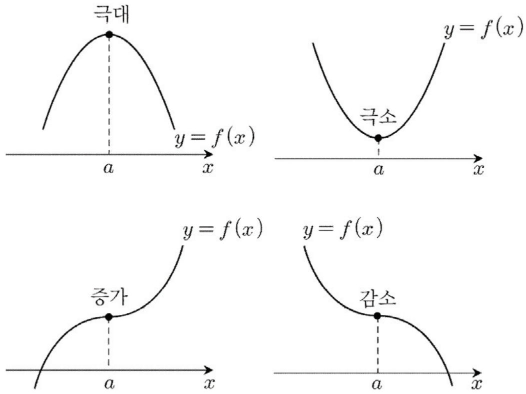
❷ $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면

$f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음과 같이 $f'(a)=0$인 9가지의 경우를 생각할 수 있다.



특히 $f(x)$가 다항함수일 때, 다음과 같이 $f'(a)=0$인 4가지의 경우를 생각할 수 있다.



문제 1

p.139

〈문제1〉
이 문제는 대수적인 방법, 기하학적 방법이 모두 가능하다. 후자에 의한 풀이는 해설집의 [참고]에 써두었다.

다음 명제의 참, 거짓을 판단하시오.
미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지면
$f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

(2) $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지면
$f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

(3) $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖고,
$g(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지면
$f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

(4) $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 갖고,
$g(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지면
$f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

문제 2

p.140

다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$$

라고 하자. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점](2011(6)-가형16)

ㄱ. $f(0)=g(0)$
ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〈문제3〉
이 문제를 풀고 해설집의 [참고]를 읽어보자.

문제 3

p.140

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\leq 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점](2016(9)-A형21)

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

▸ 다항함수의 그래프의 개형: 귀류법

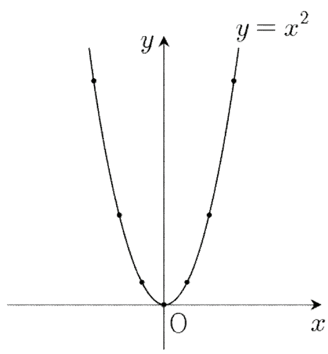
기본개념

다항함수의 그래프를 그리는 순서
❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역 표시)
❷ 좌표축과의 교점
❸ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❶, ❷에 대한 구체적인 예를 생각해보자.

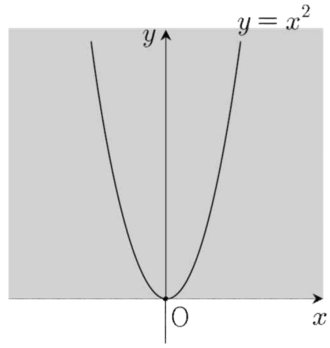
• 처음 보는 함수의 그래프는 점찍어 그린다.

교과서에서는 함수 $y=x^2$의 그래프의 개형을 처음 그릴 때, 이 곡선이 지나는 몇 개의 점을 찍고, 이 점들을 부드럽게 연결한다. 이때, 부드럽게 연결하는 이유는 이차함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 때문이다. 일반적으로 처음 보는 함수의 그래프의 개형을 그릴 때, 이 곡선이 지나는 몇 개의 점을 찾아 찍으면 전체 모양을 대략적으로 짐작할 수 있다.



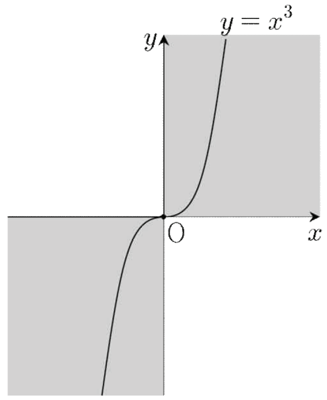
• 곡선이 지나는 영역을 표시한다. (접선을 찾게 되는 경우)

모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$이므로 곡선 $y=x^2$은 제1사분면과 제2사분면을 지나지만, 제3사분면과 제4사분면은 지나지 않는다. 그런데 곡선 $y=x^2$은 원점을 지나므로 아래 그림과 같이 원점에서 x축에 접할 수밖에 없다. 이처럼 곡선이 지나는 영역을 먼저 표시하면 곡선에 접하는 직선을 찾을 수도 있다. ($\because$ 귀류법)



• 곡선이 지나는 영역을 표시한다. (지나는 정점을 찾게 되는 경우)

모든 양수 x에 대하여 $x^3>0$, 모든 음수 x에 대하여 $x^3<0$이므로 곡선 $y=x^3$은 제1사분면과 제3사분면을 지나고, 제2사분면과 제4사분면은 지나지 않는다. 이때, 곡선 $y=x^3$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 원점을 지날 수밖에 없다. 이처럼 곡선이 지나는 영역을 먼저 표시하면 곡선이 반드시 지나는 점을 찾을 수도 있다. ($\because$ 귀류법)



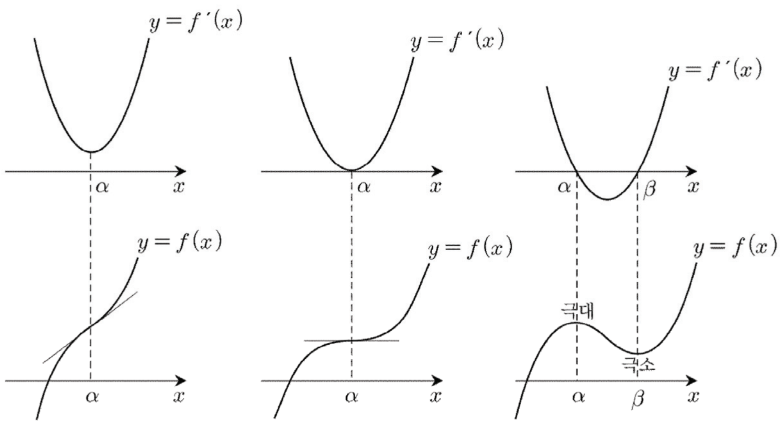
▶ 다항함수의 그래프의 개형: 삼차함수

● 삼차함수의 그래프의 개형

삼차함수의 그래프의 개형을 그리는 법에 대해서는 기본개념 편에서 매우 자세하게 설명해두었다.

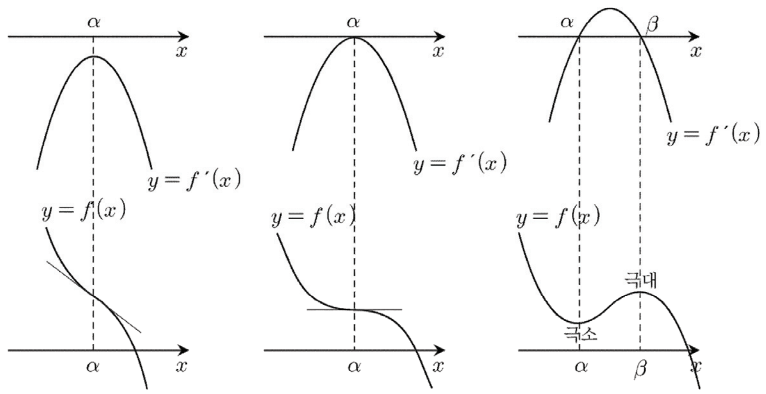
삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

• $a>0$인 경우



[경우1] [경우2] [경우3]

• $a<0$인 경우



[경우4] [경우5] [경우6]

수능 시험에서는 '$a>0$인 경우' 와 '$a<0$인 경우' 를 모두 생각할 수 있는지를 또는 구별할 수 있는지를 꾸준하게 평가하고 있다. 문제에서 $f(x)$가 삼차함수라고 주어지면 반드시 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우와 음수인 경우로 구분해야 한다.

- 삼차함수의 그래프의 개형과 필요충분조건

다음의 필요충분조건은 수능에 자주 출제된다.

- 삼차함수 $f(x)$가 역함수를 갖는 경우에 대한 필요충분조건

실전이론

삼차함수 $f(x)$는 역함수를 가진다.
$\Leftrightarrow$ [경우1], [경우2], [경우4], [경우5]
$\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 일대일대응이다.
$\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이다.
$\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.
$\Leftrightarrow$ 함수 $f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1 이하이다.
$\Leftrightarrow$ 방정식 $f'(x)=0$은 중근을 갖거나 서로 다른 두 허근을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ $D/4=b^2-3ac\leq 0$ (단, D는 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식)

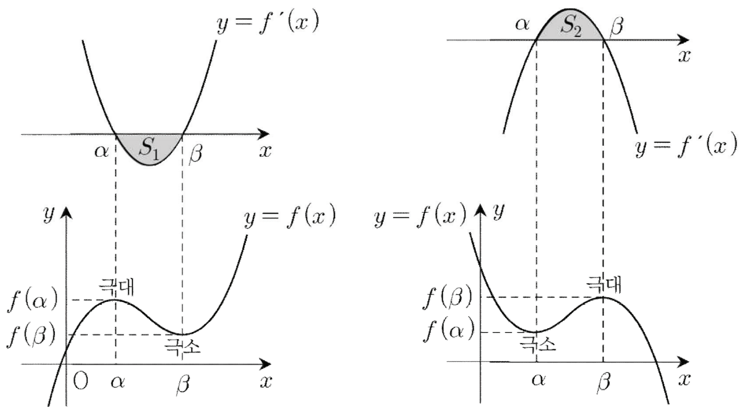
- 삼차함수 $f(x)$가 역함수를 갖지 않는 경우에 대한 필요충분조건

실전이론

삼차함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.
$\Leftrightarrow$ [경우3], [경우6]
$\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.
$\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ 함수 $f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.
$\Leftrightarrow$ 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ $D/4=b^2-3ac>0$ (단, D는 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식)

• 삼차함수의 그래프의 개형과 미적분의 기본 정리

그래프의 개형을 미적분의 기본 정리와 연관시키는 것은 수능에 매해 출제된다.



[경우3] [경우6]

미적분의 기본 정리에 의하여

[경우3]:

$$f(\beta)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}f'(x)dx=-S_1 \quad (\text{함숫값의 차})=-(\text{넓이})<0$$

[경우6]:

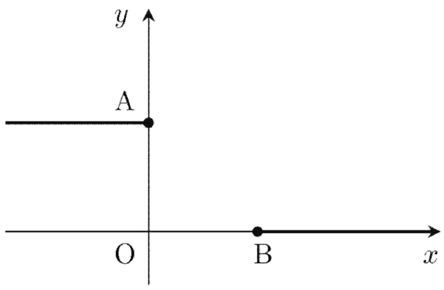
$$f(\beta)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}f'(x)dx=S_2 \quad (\text{함숫값의 차})=(\text{넓이})>0$$

〈문제4〉
이 문제는 크게 두 가지의 풀이가 가능하다. 대수적인 풀이(미분가능성의 정의), 기하학적 풀이(삼차함수의 그래프의 개형) 중에서 어떤 풀이가 실전적인지를 판단해보아라.

문제 4

p.142

다음 그림은 함수 $y=1$과 함수 $y=0$의 그래프의 일부이다.
두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$ 사이를 $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$의 그래프를 이용하여 연결하였다. 이렇게 연결된 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 미분가능하도록 상수 a, b, c의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. [4점](1998−인문예체능29/자연29)



〈문제5〉
그래프 개형을 그리는 순서(정의역/치역(영역)→절편(정점)→증가감소/극대극소)를 평가하는 문제이다. 즉, 그래프를 대충 그리면 실수할 확률이 높다.

〈문제5〉
해설집의 [참고]에 함수 $g(t)$의 그래프의 개형을 그리는 법을 설명해두었다.

문제 5

p.144

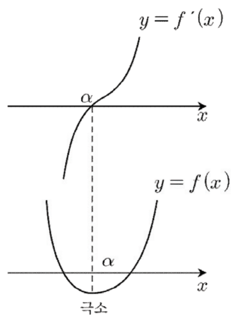
삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다.
실수 t $(t \ge -1)$에 대하여 $-1 \le x \le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자.
$\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점](2010−가형24)

▸ 다항함수의 그래프의 개형: 사차함수

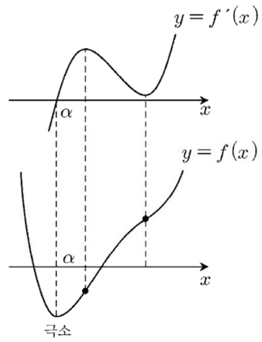
• 사차함수의 그래프의 개형(1)

사차함수 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

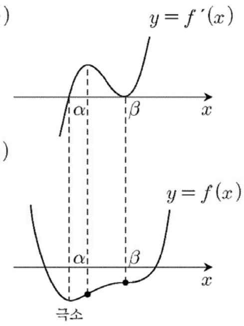
• $a>0$인 경우



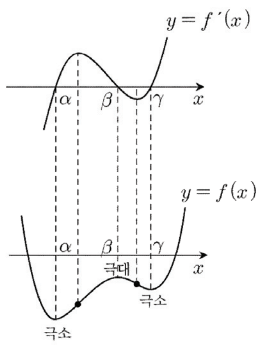
[경우1]



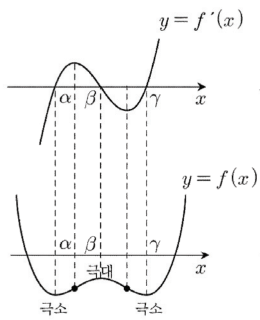
[경우2]



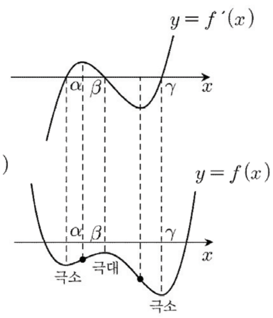
[경우3]



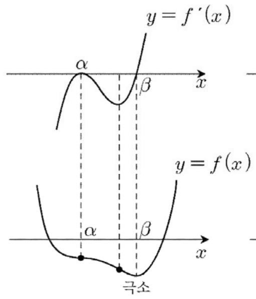
[경우4]



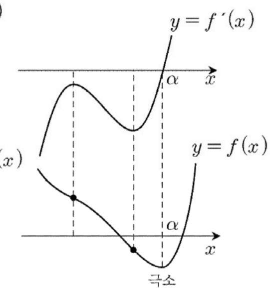
[경우5]



[경우6]



[경우7]



[경우8]

(단, ●는 곡선 $y=f(x)$의 볼록이 바뀌는 점이다.)

- $a<0$인 경우
  마찬가지로 서로 다른 8가지의 경우로 구분할 수 있다.

삼차함수와 달리 사차함수는 항상 적어도 하나 이상의 극점을 갖는다.

- 사차함수의 그래프의 개형과 필요충분조건

다음과 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.

실전이론

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가진다.
$\Leftrightarrow$ [경우4], [경우5], [경우6]
$\Leftrightarrow$ 사차함수 $f(x)$의 극점의 개수는 3이다.

문제 6

p.145

사차함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$$

일 때, 함수 $f(x)$가 극댓값을 가질 조건을 구하시오.

• 사차함수의 그래프의 개형(2)

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 삼차함수이다.

삼차방정식 $f'(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 갖는다. ($\because$ 사이값 정리)

인수정리에 의하여

$$f'(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

(단, 함수 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 a인 이차함수)

로 둘 수 있다.

방정식 $Q(x)=0$이 실근을 가지면

$$f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \text{ (단, } a\neq 0) \cdots (*)$$

으로 둘 수 있고,

방정식 $Q(x)=0$이 허근을 가지면

$$f'(x)=(x-\alpha)(ax^2+bx+c) \text{ (단, } a\neq 0)$$

으로 둘 수 있다.

(*)는 다음의 두 경우로 구분해야 한다.

$\beta=\gamma$(중근), $\beta\neq\gamma$(서로 다른 두 실근)

전자는 다시 $\alpha=\beta=\gamma$인 경우와 $\alpha\neq\beta(\alpha\neq\gamma)$인 경우로 구분해야 하며

후자는 다시 $\alpha\neq\beta$, $\beta\neq\gamma$, $\gamma\neq\alpha$인 경우, $\alpha=\beta$, $\beta\neq\gamma$인 경우, $\alpha=\gamma$, $\beta\neq\gamma$인 경우로 구분해야 한다.

이제 아래의 두 문제를 풀어보자.

〈문제7〉
이 문제를 풀고 나서 해설집의 [풀이]를 읽자. 미처 생각하지 못한 경우는 없었는가?

문제 7

p.145

사차함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

일 때, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리시오. (단, $\alpha\leq\beta\leq\gamma$이다.)

〈문제8〉
이 문제를 풀고 나서 해설집의 [풀이]를 읽자. 미처 생각하지 못한 경우는 없었는가?

문제 8

p.146

사차함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=(x-\alpha)(x^2+ax+b)$$

일 때, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리시오. (단, α, a, b는 상수이다.)

문제 9

p.147

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{B}(\beta,\ 0)$, $\mathrm{C}(\gamma,\ 0)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$에서 만난다. 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점](2011사관(1차)-이과12)

ㄱ. 방정식 $f(x)=k$(k는 실수)가 서로 다른 세 실근을 가지면 함수 $f(x)$의 극댓값은 k이다. ㄴ. $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다. ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)<0$, $f(\gamma)<0$이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

• 사차함수의 그래프의 개형과 선대칭성

사차함수의 그래프의 개형이 선대칭인 경우를 모두 찾아보자.

사차함수

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(\text{단, } a\neq 0)$$

의 그래프가 y축에 평행한 어떤 직선 $x=k$에 대하여 대칭이라고 하자.

사차함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동하면

$$\begin{aligned}f(x+k)&=a(x+k)^4+b(x+k)^3+c(x+k)^2+d(x+k)+e\\&=ax^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'\end{aligned}$$

이고, $x=0$(즉, y축)이다.

$g(x)=f(x+k)$로 두면

$$g(x)=ax^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e' \ (\text{단, } a\neq 0)$$

이제 사차함수 $g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때의 개형을 찾자.

함수 $g(x)$가 y축에 대하여 대칭이므로

모든 실수 x에 대하여

$$g(-x)=g(x)$$

즉, $a(-x)^4+b'(-x)^3+c'(-x)^2+d'(-x)+e'$

$=ax^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'$

정리하면

$$b'x^3+d'x=0$$

항등식의 필요충분조건에 의하여

$$b'=d'=0$$

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=ax^4+c'x^2+e' \ (\text{단, } a\neq 0)$$

함수 $g(x)$의 도함수는

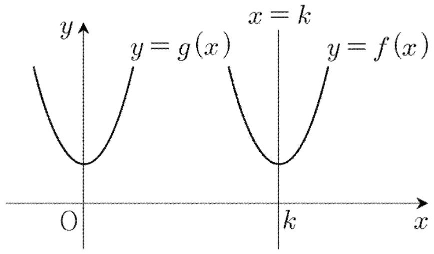
$$g'(x)=4ax^3+2c'x=4ax\left(x^2+\frac{c'}{2a}\right)$$

(ⅰ) $\dfrac{c'}{2a}\geq 0$인 경우

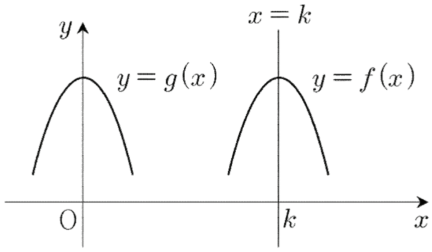
방정식 $g'(x)=0$의 실근은 $x=0$뿐이다.

$x=0$의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

$a>0$일 때, 두 함수 $g(x)$, $f(x)$의 그래프는



$a<0$일 때, 두 함수 $g(x)$, $f(x)$의 그래프는



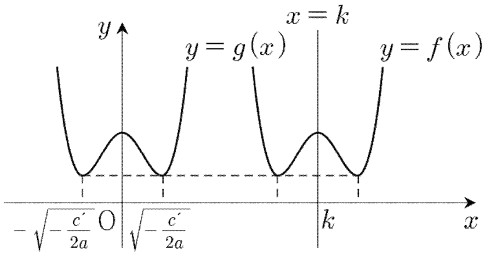
(ii) $\dfrac{c'}{2a}<0$인 경우

방정식 $g'(x)=0$의 실근은 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c'}{2a}}$

$x=0$의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

$x=\pm\sqrt{-\dfrac{c'}{2a}}$ 좌우에서 $g(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c'}{2a}}$ 에서 극값을 갖는다.

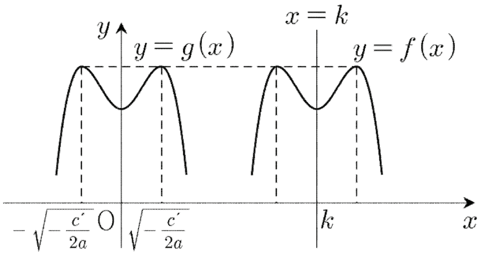
$a>0$일 때, 두 함수 $g(x)$, $f(x)$의 그래프는



위의 그림에서 사차함수의 두 극솟값은 서로 같다.

역으로 사차함수의 두 극솟값이 서로 같으면 이 사차함수의 그래프는 선대칭이다.

$a<0$일 때, 두 함수 $g(x)$, $f(x)$의 그래프는



위의 그림에서 사차함수의 두 극댓값은 서로 같다.

역으로 사차함수의 두 극댓값이 서로 같으면 이 사차함수의 그래프는 선대칭이다.

이와 관련된 문제를 풀어보자. (아래의 두 문제)

문제 10

p.148

사차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
(나) -2보다 큰 임의의 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-2,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-2)$이다.
(다) $f(x)$의 극댓값은 32이다.

방정식 $f(x)=f(0)$의 서로 다른 세 실근을 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

문제 11

p.149

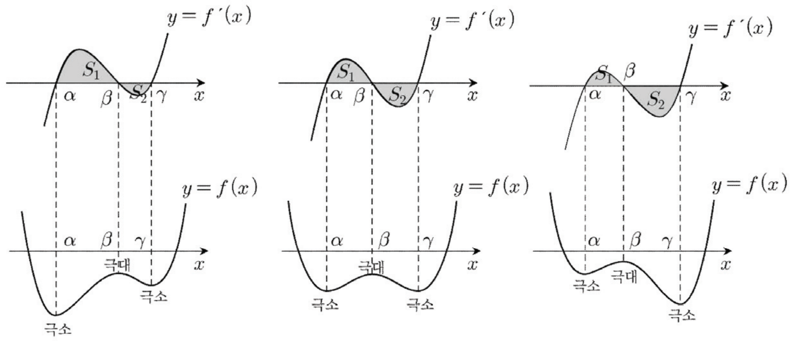
최고차항의 계수가 3인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(1)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq f'(0)$이다.

방정식 $|f(x)-f(0)|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 6일 때, 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

● 사차함수의 그래프의 개형과 미적분의 기본 정리

그래프의 개형을 미적분의 기본 정리와 연관시키는 것은 수능에 매해 출제된다.



[경우4] [경우5] [경우6]

미적분의 기본 정리에 의하여

[경우4]: $S_1 > S_2$인 경우

$$S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx > \left| \int_{\beta}^{\gamma} f'(x)dx \right|$$

$$\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha) > f(\beta)-f(\gamma) \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\gamma)$$

[경우5]: $S_1 = S_2$인 경우

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = \left| \int_{\beta}^{\gamma} f'(x)dx \right|$$

$$\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha) = f(\beta)-f(\gamma) \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\gamma)$$

[경우6]: $S_1 < S_2$인 경우

$$S_1 < S_2 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx < \left| \int_{\beta}^{\gamma} f'(x)dx \right|$$

$$\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha) < f(\beta)-f(\gamma) \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\gamma)$$

이처럼 함수 $f(x)$의 두 극소점의 상대적인 위치를 함수 $f'(x)$의 정적분 값과 연관시켜서 파악할 수 있어야 한다.

▶ 다항함수의 그래프의 개형: 인수정리

• 다항함수의 그래프와 인수정리

실전이론

다항함수 $f(x)$에 대하여
$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$
이면 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.

증명

$f(\alpha)=0$이므로 인수정리에 의하여

$$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x) \qquad \cdots ㉠$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=Q_1(x)+(x-\alpha)Q_1'(x)$$

$f'(\alpha)=0$이므로

$$f'(\alpha)=Q_1(\alpha)+0\times Q_1'(\alpha) \text{ 즉, } Q_1(\alpha)=0$$

인수정리에 의하여

$$Q_1(x)=(x-\alpha)Q_2(x)$$

㉠에 대입하면

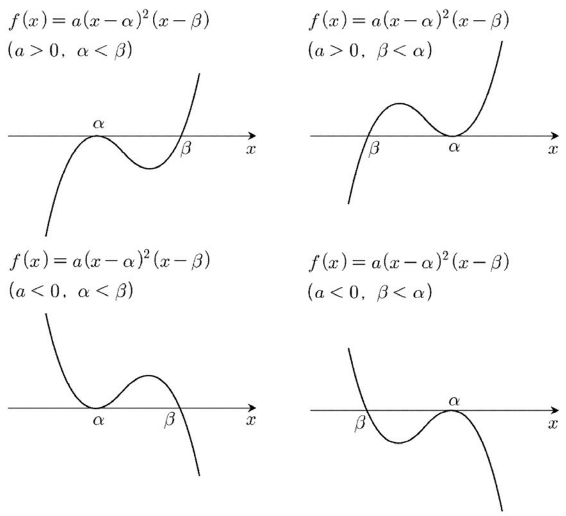
$$f(x)=(x-\alpha)^2Q_2(x)$$

따라서 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.

• 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$$

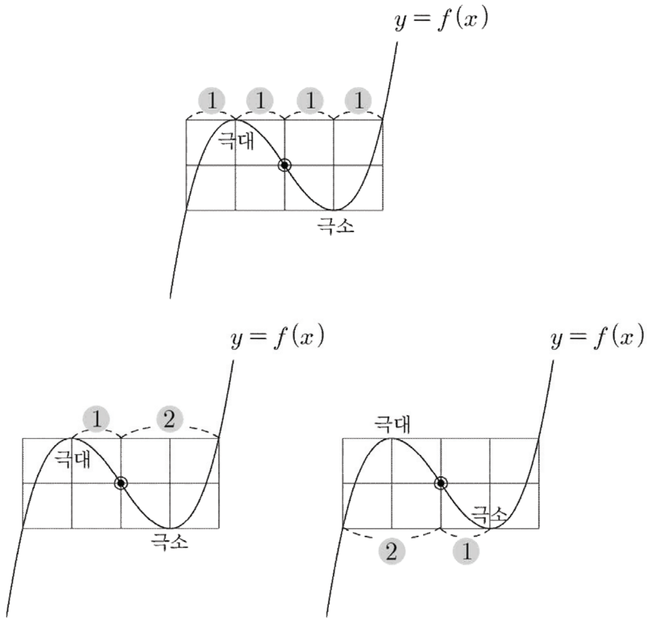
일 때, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다. (단, $\alpha\neq\beta$이다.)



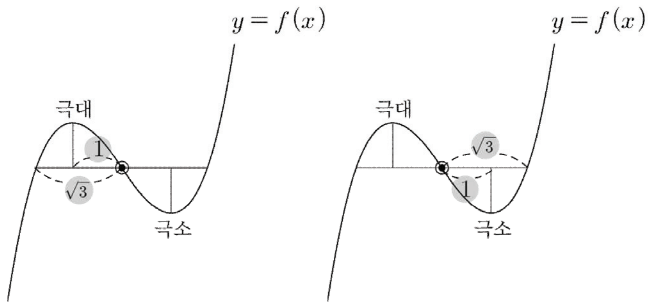
• 삼차함수의 그래프의 개형과 비례관계

한편 삼차함수의 그래프에서 다음의 비례관계가 성립한다.

❶



❷



(단, ◉는 곡선 $y=f(x)$의 볼록이 바뀌는 점이고,
모든 선분은 x축 또는 y축에 평행하다.)

예를 들어 함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여

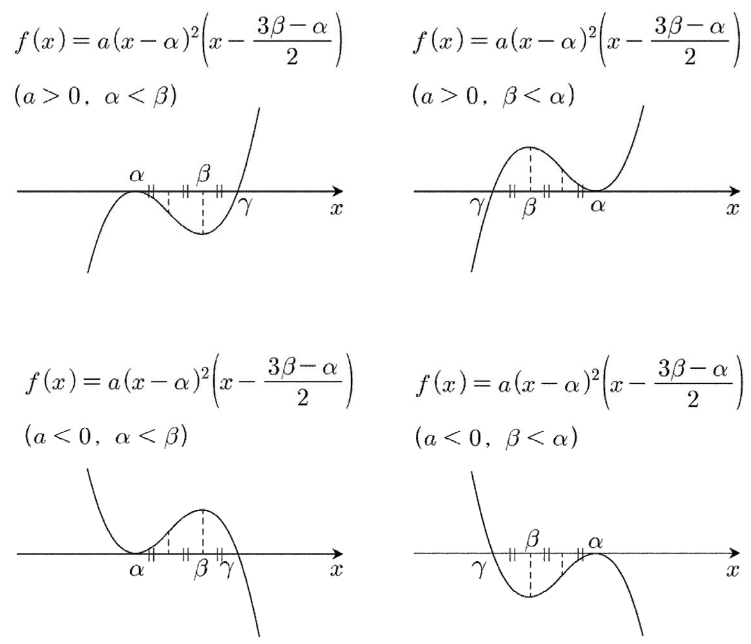
❶ 두 극점의 좌표가 각각 $(-1,\ 2)$, $(1,\ -2)$이고, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=2$, $y=-2$가 만나는 두 교점 중에서 극점이 아닌 점의 x좌표가 각각 2, -2이므로 ❶이 성립함을 알 수 있다.

❷ 두 극점의 x좌표가 각각 ± 1이고, 곡선 $y=f(x)$의 x절편이 $\pm\sqrt{3}$이므로 ❷가 성립함을 알 수 있다.

• 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0$$

일 때, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다. (단, $\alpha\neq\beta$, $f(\gamma)=0$이다.)



삼차함수의 그래프의 비례관계를 이용하여 좌측상단의 γ의 값을 구하면 다음과 같다.

수직선에서 β는 α, γ의 $2:1$내분점이므로

$$\beta=\frac{\alpha+2\gamma}{3},\ 즉\ \gamma=\frac{3\beta-\alpha}{2}$$

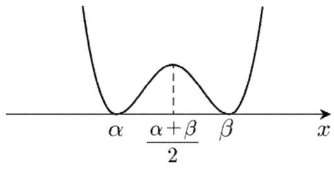
마찬가지의 방법으로 나머지 세 경우에 대한 γ의 값을 구할 수 있다.

• 사차함수 $f(x)$에 대하여

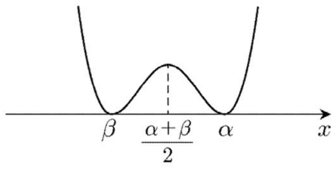
$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ \ f(\beta)=f'(\beta)=0$$

일 때, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다. (단, $\alpha\neq\beta$이다.)

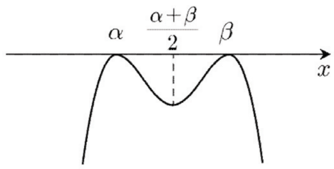
$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$
$(a>0,\ \alpha<\beta)$



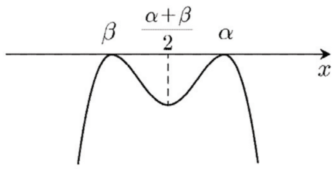
$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$
$(a>0,\ \beta<\alpha)$



$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$
$(a<0,\ \alpha<\beta)$



$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$
$(a<0,\ \beta<\alpha)$



일반적으로 다음이 성립한다.

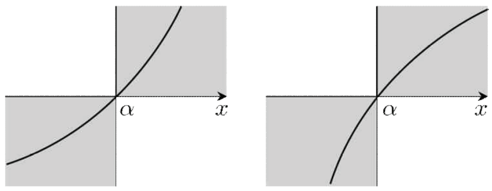
다항함수 $f(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 가지고, $(x-\alpha)^n$은 인수로 가지지 않는다고 하자. (단, $n\geq 2$인 자연수)

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

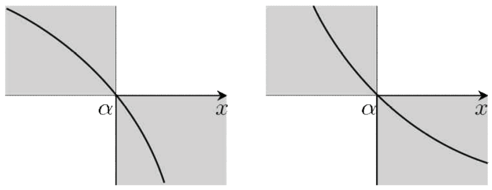
$$f(x)=(x-\alpha)P(x)\ \text{(단, } P(x)\text{는 } P(\alpha)\neq 0\text{인 다항식)}$$

$f(\alpha)=0$이지만 $f'(\alpha)\neq 0$이므로 $x=\alpha$ 좌우에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

$y=f(x)\ (P(\alpha)>0)$

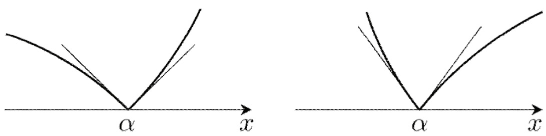


$y=f(x)\ (P(\alpha)<0)$

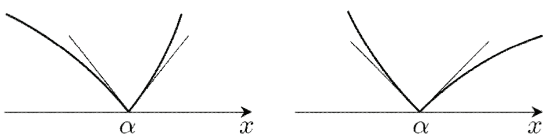


아래 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

$y=|f(x)|\,(P(\alpha)>0)$



$y=|f(x)|\,(P(\alpha)<0)$



다항함수 $f(x)$가 $(x-\alpha)^n$을 인수로 가진다고 하자. (단, $n \geq 2$인 자연수)

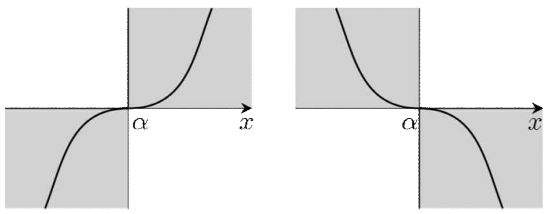
함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$$f(x)=(x-\alpha)^n P(x) \text{ (단, } P(x)\text{는 } P(\alpha)\neq 0\text{인 다항식)}$$

• n이 홀수인 경우

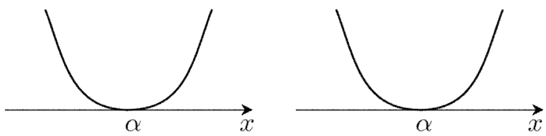
$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$이므로 $x=\alpha$ 좌우에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

$y=f(x)$ $(P(\alpha)>0)$ $y=f(x)$ $(P(\alpha)<0)$



아래 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $x=\alpha$에서 미분가능하다.

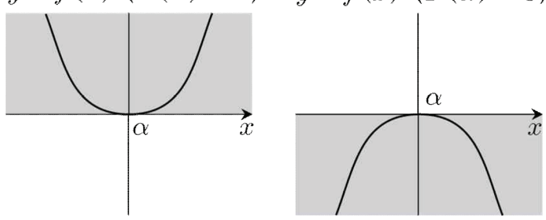
$y=|f(x)|$ $(P(\alpha)>0)$ $y=|f(x)|$ $(P(\alpha)<0)$



• n이 짝수인 경우

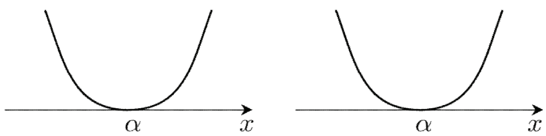
$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$이므로 $x=\alpha$ 좌우에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

$y=f(x)$ $(P(\alpha)>0)$ $y=f(x)$ $(P(\alpha)<0)$



아래 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $x=\alpha$에서 미분가능하다.

$y=|f(x)|$ $(P(\alpha)>0)$ $y=|f(x)|$ $(P(\alpha)<0)$

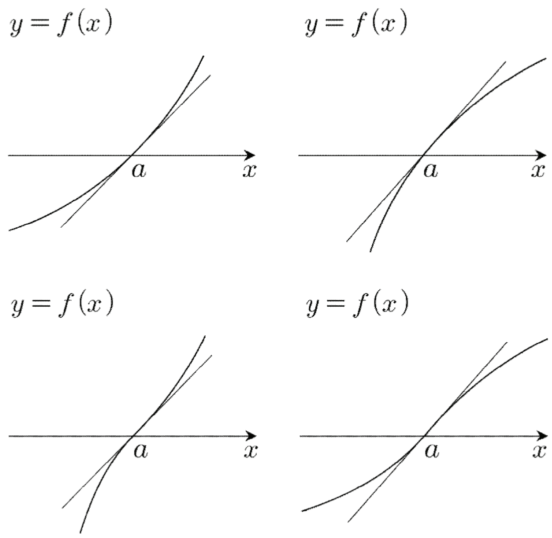


다항함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=b$이면 $f(a)=0$, $f'(a)=b$이다.

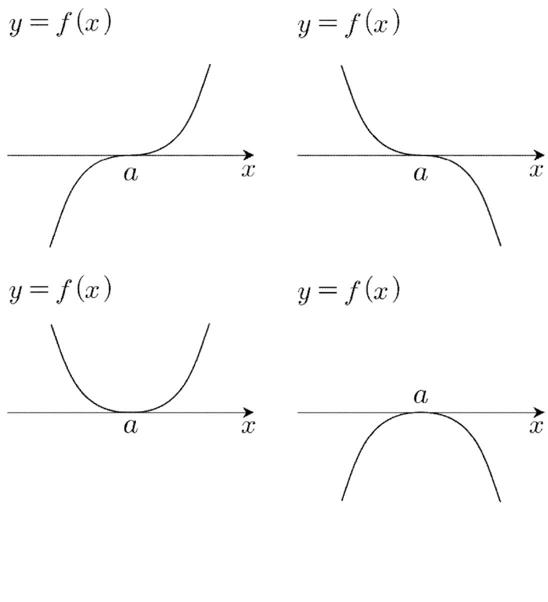
곡선 $y=f(x)$는 점 $(a,\ 0)$을 지나고 이 점에서의 접선의 기울기는 b이다.

따라서 $x=a$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

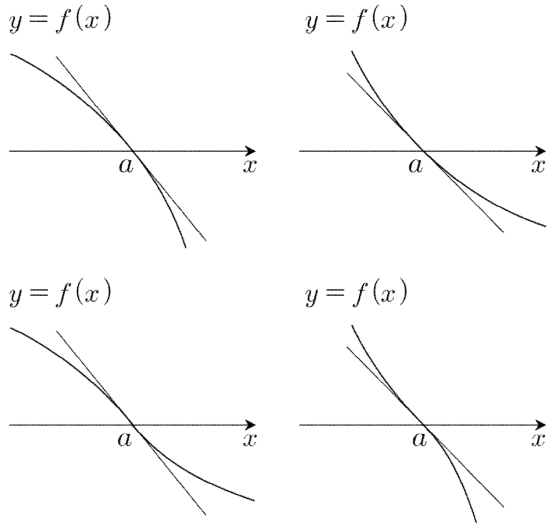
(1) $b>0$인 경우



(2) $b=0$인 경우



(3) $b<0$인 경우



함수 $f(x)$가 삼차함수 또는 사차함수일 때,

❶ 삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형

❷ 곡선 $y=f(x)$가 지나는 점과 그 점에서의 접선의 기울기

위의 두 가지를 알면 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 빠르게 그릴 수 도 있다.

이제 아래의 문제를 풀어보자.

〈문제12〉
이 문제를 풀고 해설집의 [참고]를 정독하자.

문제 12

p.150

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점](2011(6)-가형12)

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다. ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다. ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▶ 다항함수의 그래프의 개형: 영역

다항함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 때,
❶ 삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형
❷ 지나는 영역 (정의역/치역)
❸ 지나는 정점 (절편/그 외의 정점)
위의 세 가지를 알면 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 빠르게 그릴 수 도 있다.

이제 아래의 두 문제를 풀어보자.

〈문제13〉
이 문제를 읽고 나서 '반복', '정점', '영역' 이 떠올랐다면 앞에서 설명한 실전이론을 잘 이해한 것이다. 이 문제를 풀고 나서 [풀이3]을 확인하자.

문제 13

p.152

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점](2015-A형21)

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38
④ 43 ⑤ 48

〈문제14〉
이 문제를 읽고 나서 '위치관계', '정점', '영역' 이 떠올랐다면 앞에서 설명한 실전이론을 잘 이해한 것이다. 이 문제를 풀고 나서 [풀이2]를 확인하자.

문제 14

p.154

$x>0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $2x \leq f(x) \leq 3x$이다. $f(1)=2$이고 $f(2)=6$일 때, $f'(1)+f'(2)$의 값은? [4점](2014(예비)-B형18)

① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

▶ 다항함수의 그래프의 개형: 평행이동, 대칭성

사차함수의 그래프의 개형이 선대칭일 때, 함수의 방정식을 유도한 바 있다. 이 과정에서 평행이동이 적용되었음을 기억하는가? 이처럼 수능에 출제되는 미적분 문제 중에는 평행이동을 적용했을 때 계산이 쉬워지는 문제들이 적지 않다.

아래의 문제를 평행이동의 관점에서 풀어보자.

〈문제15〉
이 문제에서 주어진 모든 곡선과 점을 x축의 방향으로 평행이동하면 된다. 이는 [참고5]에서 확인할 수 있다.

문제 15

p.155

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점](2018(6)-나형30)

미적분과 관련된 평행이동의 성질은 다른 주제들에서도 여러 차례 다루고 있으므로 이를 참고하길 바란다.

▶ 수평화

● 수평화란?

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선을 $y=g(x)$라고 하자. $h(x)=f(x)-g(x)$로 두고, 함수 $h(x)$를 '함수 $f(x)$를 수평화시킨 함수' 라고 부르자.

예를 들어 2차 이상의 다항함수 $f(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나눈 나머지에 대하여 생각해보자.

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+a(x-\alpha)+b$$

에서 $a=f'(\alpha)$, $b=f(\alpha)$이므로

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)\ \cdots(*)$$

이때, $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 방정식이다.

이 접선의 방정식을 $g(x)$로 두고 (*)에 대입하면

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$$

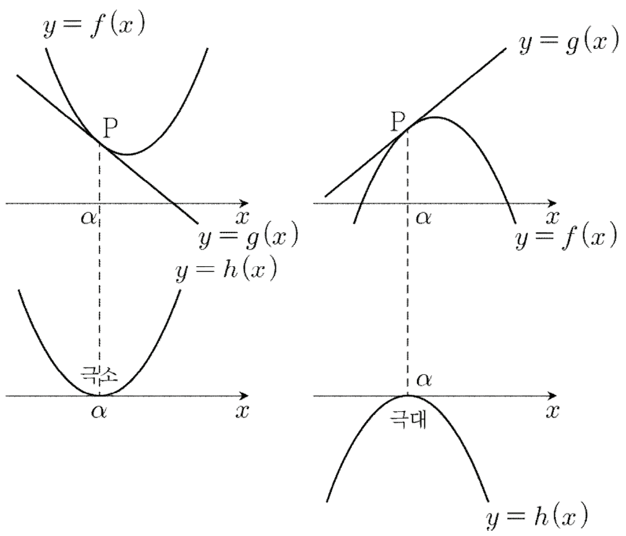
이때, 함수 $f(x)-g(x)$는 '함수 $f(x)$를 수평화시킨 함수' 이다.

● 수평화와 그래프의 개형

함수 $f(x)$가 미분가능하다고 하자.

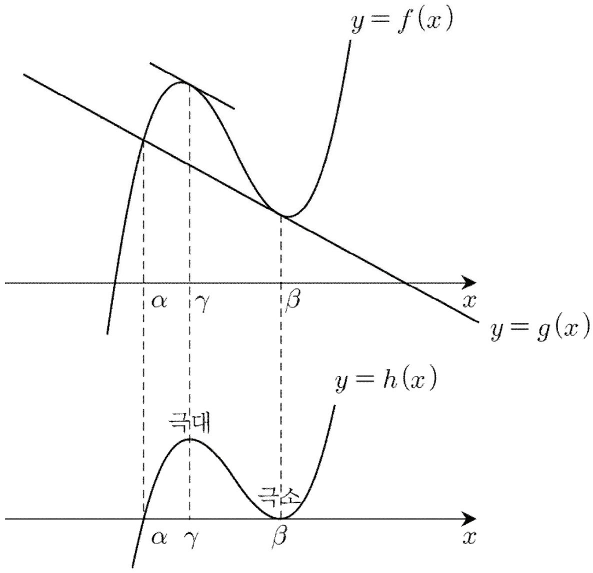
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선을 $y=g(x)$라고 할 때,

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



• 삼차함수의 수평화

아래 그림처럼 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선을 $y=g(x)$라고 하자.



직선 $y=g(x)$의 방정식은

$$g(x)-f(\beta)=f'(\beta)(x-\beta)$$

즉, $g(x)=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$는

$$h(x)=f(x)-f'(\beta)x+\beta f'(\beta)-f(\beta)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$h'(x)=f'(x)-f'(\beta)$$

$h'(x)=0$에서 $f'(x)=f'(\beta)$ 풀면 $x=\beta,\ x=\gamma$

따라서 함수 $h(x)$의 그래프의 극대점은 $(\gamma,\ h(\gamma))$, 극소점은 $(\beta,\ 0)$이다.

그리고 곡선 $y=h(x)$의 x절편은 $\alpha,\ \beta$이다.

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$$

그리고 다음과 같은 수학적 사실을 생각할 수 있다.
(증명은 어렵지 않으므로 여러분에게 맡긴다.)

(1) 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$$

인 γ가 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 적어도 하나 존재한다.
(2) $f'(\beta)=f'(\gamma)=$(직선 $y=g(x)$의 기울기)
(3) 함수 $y=|f(x)-g(x)|$는 오직 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다.

(1) 롤의 정리에 의하여 $h'(\gamma)=0$인 γ가 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 적어도 하나 존재한다.
(2) $h'(\beta)=h'(\gamma)=0$ (즉, 직선 $y=0$의 기울기와 같다.)
(3) 함수 $y=|h(x)|$는 오직 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다.

● 삼차함수 $y=x^3$ 위의 점에서의 접선에 대한 연구

우선 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 대하여 알아보자. (교육과정 외이지만 알아두면 편할 때가 많다.)

삼차방정식

$$ax^3+bx^2+cx+d=0(\text{단, } a\neq 0)$$

의 세 근을 α, β, γ라고 하자.

인수정리에 의하여

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

우변을 전개하면

$$ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

항등식의 필요충분조건에 의하여

$$b=-a(\alpha+\beta+\gamma),\ c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),\ d=-a\alpha\beta\gamma$$

정리하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

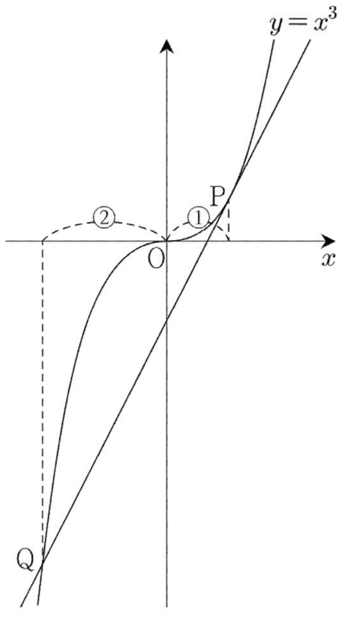
따라서 이차항의 계수가 0인 모든 삼차방정식

$$x^3+px+q=0$$

에 대하여 세 근의 합은 0이다.

다음과 같은 예를 생각하자.

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라고 하자.



점 P에서의 기울기가 $3t^2$이므로 접선의 방정식은

$$y=3t^2(x-t)+t^3 \text{ 즉, } y=3t^2x-2t^3$$

곡선과 접선의 방정식을 연립하면

$$x^3=3t^2x-2t^3$$

정리하면

$$x^3-3t^2x+2t^3=0 \qquad \cdots(*)$$

좌변을 인수분해하면

$$(x-t)^2(x+2t)=0 \text{ 풀면 } x=t \text{ 또는 } x=-2t$$

점 Q의 x좌표는 $-2t$이다.

여기까지가 교과서의 전형적인 풀이이다.

이제 이차항의 계수가 0인 삼차방정식의 모든 근의 합이 0임을 이용하여 점 Q의 x좌표를 구해보자.

점 Q의 x좌표를 s라고 하면 방정식 (*)의 세 실근은 t, t, s이다.

방정식 (*)의 이차항의 계수가 0이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$t+t+s=0 \text{ 즉, } s=-2t$$

따라서 점 Q의 x좌표는 $-2t$이다.

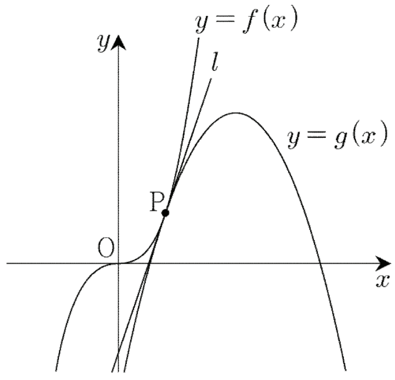
위와 같이 삼차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하면 점 Q의 좌표를 빠르게 유도할 수 있다. 물론 앞서 배운 삼차함수의 수평화에서 점 $(0,\ 0)$이 두 점 $(s,\ 0)$, $(t,\ 0)$의 $2:1$내분점임을 이용하면 $s=-2t$를 빠르게 유도할 수 있다.

〈문제16〉
이 문제도 수평화((곡선)−(직선))과 다르지 않다.

문제 16

p.158

삼차함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선을 l이라고 하자. 아래 그림처럼 이차함수 $g(x)$의 그래프는 점 P에서 직선 l에 접한다. 점 P의 x좌표를 t라고 할 때, 곡선 $y=f(x)-g(x)$는 점 $(t,\ 0)$에서 x축에 접함을 증명하여라.



▸ 방정식 $f(f(x))=x$의 실근에 대한 연구

• 역함수에 대한 몇 개의 명제

다음 명제들을 생각해보자.

> 두 함수 $f:\ X \to Y$, $g:\ Y \to X$에 대하여
>
> ❶ g는 f의 역함수이다.
> $\Rightarrow g(f(x))=x$(모든$x \in X$), $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$) (참)
> ❷ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$), $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$)
> $\Rightarrow$ g는 f의 역함수이다. (참)
> ❸ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$) $\rightarrow$ g는 f의 역함수이다. (거짓)
> ❹ $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$) $\rightarrow$ g는 f의 역함수이다. (거짓)
> ❺ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$) $\rightarrow$ $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$) (거짓)
> ❻ $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$) $\rightarrow$ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$) (거짓)

각각의 명제의 참, 거짓 판정 근거는 다음과 같다.
(자세한 증명은 수학2 함수 단원의 실전이론 편을 참고하면 된다.)

〈근거〉
❶ 역함수의 성질에 의하여 주어진 명제는 참이다.
❷ 모든 $x \in X$에 대하여 $g(f(x))=x$이면 f는 일대일함수이다.
모든 $y \in Y$에 대하여 $f(g(y))=y$이면 f의 공역과 치역은 같다.
따라서 f는 일대일대응이고, $g=f^{-1}$이다.
❸ f는 일대일함수이지만 f의 공역과 치역이 같다는 보장은 없다.
❹ f의 공역과 치역은 같지만 f가 일대일함수라는 보장은 없다.
❺ f가 일대일함수라고 해서 f의 공역과 치역이 같으리라는 보장은 없다.
❻ f의 공역과 치역이 같다고 해서 f가 일대일함수라는 보장은 없다.

❷는 ❶의 역명제이므로 다음의 필요충분조건이 성립한다.

> g는 f의 역함수이다.
> $\Leftrightarrow$
> $g(f(x))=x$(모든$x \in X$), $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$)

일반적으로 다음이 성립한다.

함수 $f: X \to X$에 대하여
f는 f의 역함수이다. $\Leftrightarrow$ $f(f(x))=x$(모든$x \in X$)

• **방정식 $f(f(x))=x$의 실근에 대한 연구**

(1) 항등식

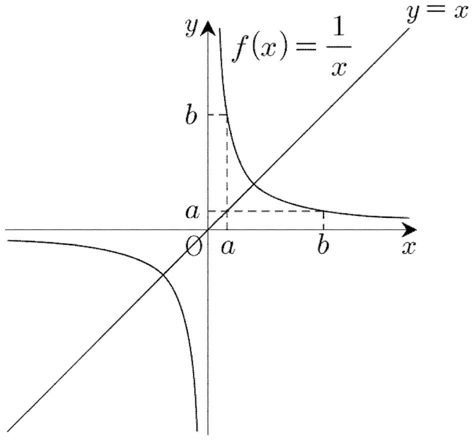
함수 $f: X \to X$의 정의역 X의 모든 x에 대하여

$$f(f(x))=x$$

가 성립하면 $f^{-1}=f$이다.

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 (a, b)를 지나면 이 곡선은 점 (b, a)를 반드시 지난다. 그리고 역도 성립한다.

예를 들어 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 역함수는 자기 자신이고, 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$이다.



(2) 방정식

어떤 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$가 성립하는 경우를 알아보자.

방정식

$$f(f(x))=x \qquad \cdots(*)$$

이 실근을 가질 때, 한 실근을 a라 하고, $f(a)=b$로 두면
$f(f(a))=a$에서 $f(b)=a$이다.

(*)에 $x=b$를 대입하면

$$f(f(b))=f(a)=b,\ 즉\ f(f(b))=b$$

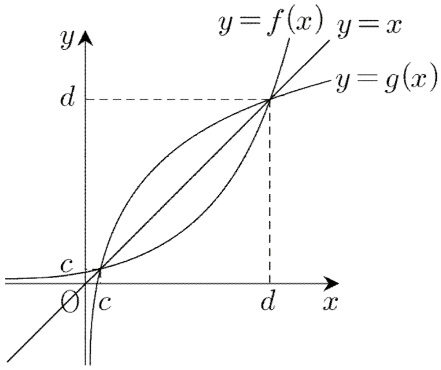
이므로 b는 방정식 (*)의 실근이다.

이제 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 곡선 $y=g(x)$와 일치한다고 하자.

❶ $a=b$인 경우

두 점 $(a,\ b)$, $(b,\ a)$는 점 $(a,\ a)$로 일치하고, 이 점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

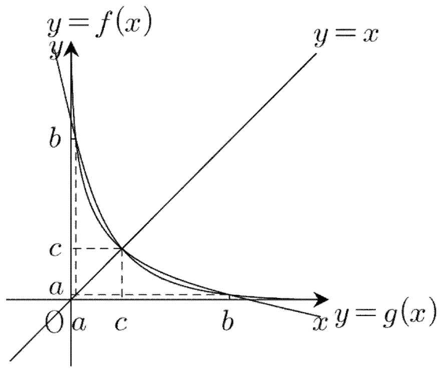


위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 두 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있다.

❷ $a\neq b$인 경우

두 점 $(a,\ b)$, $(b,\ a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때, 이 두 점을 연결하여 만든 직선의 기울기는 -1이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.



위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 세 교점 중에서 두 점은 직선 $y=-x+a+b$ 위에 있고 (즉, 기울기가 -1인 직선 위에 있고) 나머지 한 점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

일반적으로 다음이 성립한다.

곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 곡선 $y=g(x)$와 일치한다고 하자.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나서 생긴 교점의 좌표를 (a, b)라고 하면 이 두 곡선은 점 (b, a)도 지나므로

$$f(a)=g(a)=b, \ f(b)=g(b)=a$$

즉, $f(a)=b$, $f(b)=a$

$$f(f(a))=f(b)=a, \ f(f(b))=f(a)=b$$

이므로 $x=a$, $x=b$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.

역으로 $x=a$가 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이고, $f(a)=b$이면

$$f(f(a))=f(b)=a, \text{ 즉 } f(b)=a$$

방정식 $f(f(x))=x$에 $x=b$를 대입하면

$$f(f(b))=f(a)=b, \text{ 즉 } f(f(b))=b$$

이므로 $x=b$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.

곡선 $y=f(x)$가 두 점 (a, b), (b, a)를 지나므로 곡선 $y=g(x)$는 두 점 (b, a), (a, b)를 지난다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 두 점 (a, b), (b, a)를 교점으로 가진다.

참고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 대신에
두 도형 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$으로 두어야 하는 경우도 있다.

이제 다음의 두 문제를 풀어보자.

〈문제17〉
이 문제를 풀고 [풀이1]을 정독하자.

문제 17

p.158

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점](2019(6)–나형29)

〈문제18〉
이 문제를 풀고 [참고6]을 읽어보자.

문제 18

p.162

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f\circ f)(x)=x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1)<0,\ f'(2)<0,\ f'(0)-f'(1)=6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1<a<2<b$) [4점](2019(9)–나형30)

수능
수학
독본

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

해설 목차

〈 기본개념 편 〉

〈 실전이론 편 〉

Ⅰ 수열의 극한

❶ 수열의 극한

1 수열의 극한

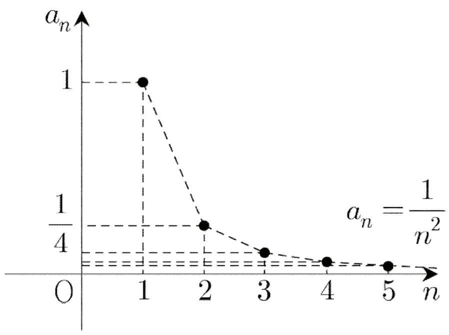
1

[풀이]

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{n^2}$

$$a_n=\frac{1}{n^2}$$

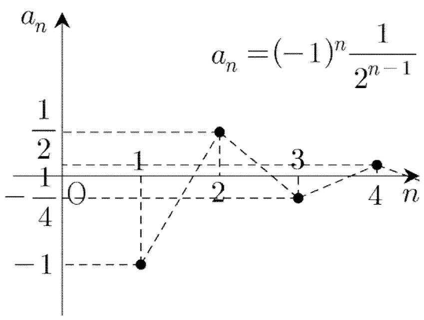


위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}$

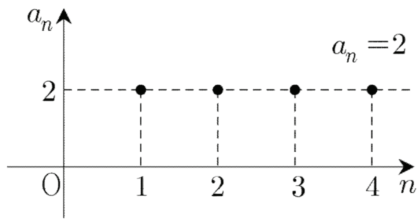


위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}=0$

(3) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=2$



위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 2로 일정하므로(즉, 모든 자연수 n에 대하여 a_n의 값은 항상 2이므로), 이 수열은 2에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}2=2$

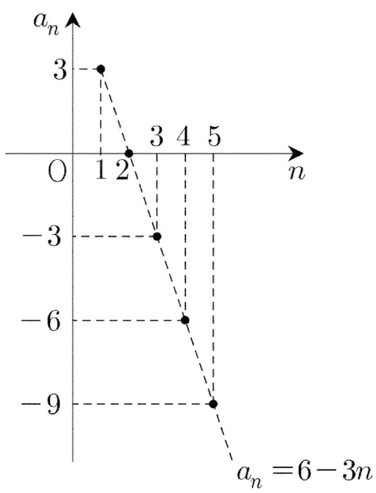
답 (1) 0 (2) 0 (3) 2

2

[풀이]

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=6-3n$

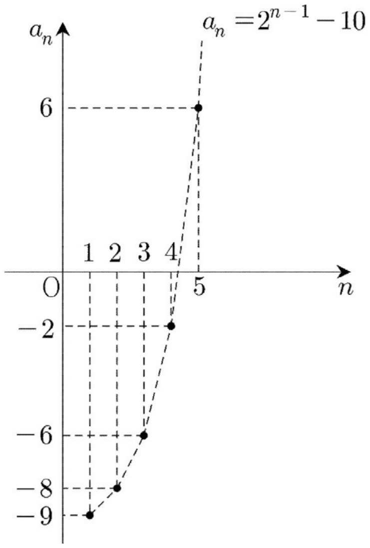


위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 음수로서 그 절댓값이 한없이 커지므로, 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(6-3n)=-\infty$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=2^{n-1}-10$



위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 한없이 커지므로, 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(2^{n-1}-10)=\infty$

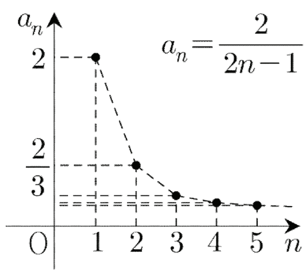
답 (1) 음의 무한대로 발산 (2) 양의 무한대로 발산

3

[풀이]

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\dfrac{2}{2n-1}$

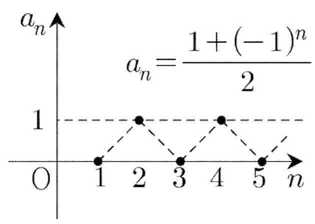


위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{2n-1}=0$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

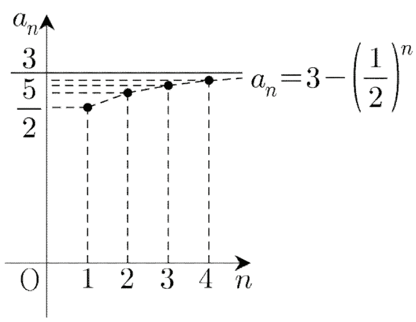
$a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$



위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 0과 1이 교대로 나타나므로 일정한 수에 가까워지지 않는다. 따라서 이 수열은 진동하면서 발산한다.

(3) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

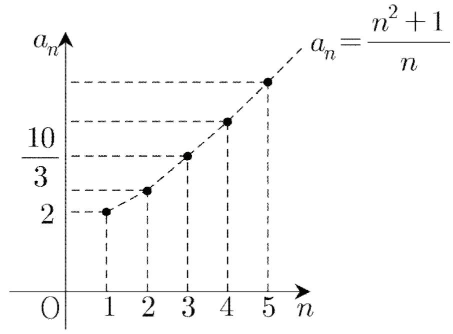


위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 3에 한없이 가까워지므로, 이 수열은 3에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}=3$

(4) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\dfrac{n^2+1}{n}$



위의 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 한없이 커지므로, 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}=\infty$

답 (1) 0 (2) 발산(진동) (3) 3 (4) 발산(∞)

2 수열의 극한값의 계산

4

[풀이]

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(4-\frac{3}{n}\right)=0\cdot(4-0)=0\cdot 4=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+2}{3-\frac{5}{n}}=\frac{0+2}{3-0}=\frac{2}{3}$

답 (1) 0 (2) $\frac{2}{3}$

5

[풀이]

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}2=\alpha-2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)$

$=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n+4\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3\alpha+4\beta$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}5a_nb_n=5(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)=5\alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-1}{2b_n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}1}{2(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)^2}=\frac{\alpha-1}{2\beta^2}$

답 (1) $\alpha-2$ (2) $3\alpha+4\beta$ (3) $5\alpha\beta$ (4) $\frac{\alpha-1}{2\beta^2}$

6

[풀이]

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n+4}{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{4}{n}}{3+\frac{2}{n}}$

$=\frac{-1+0}{3+0}=-\frac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n-1}{4n^3+3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{4+\frac{3}{n^3}}=\frac{0+0-0}{4+0}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$

$=\frac{2}{1+1}=1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}{4}$

$=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}$

답 (1) $-\frac{1}{3}$ (2) 0 (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{3}{2}$ (6) $\frac{1}{2}$

[참고]

다음과 같이 다항식의 최고차항의 계수의 비로 극한값을 빠르게 구할 수 있다.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n+4}{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{3n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n-1}{4n^3+3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0\cdot n^3+5n^2+2n-1}{4n^3+3}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{0n^3}{4n^3} = \frac{0}{4} = 0$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + \cdots}{2n^2 + \cdots} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

7

[풀이]

(1) $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}$

이므로

$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2} \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3} \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4} \cdots$

$\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n-1)} \frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

(2) $1+2+3+ \cdots +n = \frac{n(n+1)}{2}$

이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+ \cdots +n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

(3) $1+2+3+ \cdots +n = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고

$1^2+2^2+3^2+ \cdots +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+2+3+ \cdots +n)}{1^2+2^2+3^2+ \cdots +n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{2}$

[참고]

(2) $1+2+3+ \cdots +n\left(=\frac{n(n+1)}{2}\right)$은 n에 대한

2차식이고, 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+ \cdots +n}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

(3) $1+2+3+ \cdots +n$과

$1^2+2^2+3^2+ \cdots +n^2$은

각각 $\frac{1}{2}n^2 + \cdots$, $\frac{2}{6}n^3 + \cdots$이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+2+3+ \cdots +n)}{1^2+2^2+3^2+ \cdots +n^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}} = \frac{3}{2}$

8

[풀이]

만약 $a > 0$이면

$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+bn+5}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{an+b+\frac{5}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \infty$

($\because$ $a>0$이고 $n\to\infty$일 때, $an\to\infty$이므로

주어진 식은 $\frac{\infty+b}{2} \to \infty$이다.)

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $a \le 0$

만약 $a < 0$이면

$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+bn+5}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{an+b+\frac{5}{n}}{2-\frac{1}{n}} = -\infty$

($\because$ $a<0$이고 $n\to\infty$일 때, $an\to-\infty$이므로

주어진 식은 $\frac{-\infty+b}{2} \to -\infty$이다.)

이므로 이는 가정에 모순이다.
따라서 $a=0$ ($\because$ 귀류법)
이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+5}{2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{5}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{b}{2}=4$$

$b=8$

$\therefore\ a+b=8$

답 8

[참고]
만약 분자가 n에 대한 이차식이면 $n\to\infty$일 때,
(분자)$\gg$(분모)
이므로 주어진 수열은 $\pm\infty$로 발산한다.
따라서 분자는 반드시 일차식이어야 한다.
$\therefore\ a=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+5}{2n-1}=\frac{b}{2}=4$$

$\therefore\ b=8$
$\therefore\ a+b=8$

9

[풀이]
일반항 a_n은 $a_n=3n-3(n\ge 1)$이다.
등차수열의 합의 공식에 의하여

$$S_n=\frac{0+(3n-3)}{2}\times n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n(n\ge 1)$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+2}}-\sqrt{S_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{3}{2}(n+2)(n+1)}-\sqrt{\frac{3}{2}n(n-1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{4n+2}{\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4}{1+1}=\sqrt{6}$$

답 $\sqrt{6}$

10

[풀이]

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+5}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}n=\infty$이고,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\text{이므로}$$

수열 $\left\{\frac{n^2-2n+5}{2n+1}\right\}$는 양의 무한대로 발산한다.

(2) $$\lim_{n\to\infty}(n^2-4n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n}-4\right)$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}n^3=\infty$이고, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-4\right)=-4$이므로

수열 $\{n^2-4n^3\}$은 음의 무한대로 발산한다.

답 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 음의 무한대로 발산

[참고]
(1) $n\to\infty$일 때, (이차식)$\gg$(일차식)이고, 분자와 분모의 최고차항의 계수의 부호가 같으므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
(2) $n\to\infty$일 때, (삼차식)$\gg$(이차식)이고, 삼차식의 최고차항의 계수가 음수이므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

11

[풀이]

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a^2)n^3+2(2-ab)n^2+(3-b^2)n}{\sqrt{n^2+4n+3}+(an+b)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a^2)n^2+2(2-ab)n+3-b^2}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+a+\frac{b}{n}} \cdots (*)$$

여기서 분자의 n^2과 n의 계수가 모두 0이어야 문제에서 주어진 수열은 수렴한다. (∵ 귀류법)

$1-a^2=0$, $2-ab=0$을 풀면

$(a,\ b)=(1,\ 2)$ 또는 $(-1,\ -2)$

그런데 $a=-1$이면 분자, 분모가 각각 -1, 0에 수렴하므로 문제에서 주어진 수열은 발산한다. 따라서 $a=1$, $b=2$이다.

이를 (*)에 대입하면

$$(*)= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

답 $a=1$, $b=2$, $c=-\frac{1}{2}$

12

[풀이]

문제에서 주어진 부등식을 변형하면

$$\frac{2n^2-n}{n^2+1}< a_n < \frac{2n^2+n}{n^2+1}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+1}=2$

이므로 수열의 극한의 대소 관계 ❷에 의하여

$\lim_{n\to\infty} a_n=2$

답 2

13

[풀이]

문제에서 주어진 부등식을 변형하면

$$\frac{2n-1}{n}< a_n < \frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=2$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}\cdot a_n=2\cdot 2=4$$

답 4

14

[풀이]

〈증명〉

모든 자연수 n에 대하여 부등식

$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$

이 성립한다.

(예를 들어 $-|-3|\le -3 \le |-3|$,

$-|2| \le 2 \le |2|$)

그런데

$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

답 풀이참조

15

[풀이]

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$로 두자.

이때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > b_n$이므로

수열의 극한의 대소 관계 ❶에 의하여

$\alpha \ge \beta$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta=1$,

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta=-2$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 α, β는 이차방정식

$t^2-t-2=0$의 서로 다른 두 실근이다.

$(t-2)(t+1)=0$ 풀면 $\alpha=2$, $\beta=-1$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n^2 - b_n^2) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 - \lim_{n\to\infty} b_n^2$

$= 2^2 - (-1)^2 = 3$

답 3

16

[풀이]

$b_n = na_n - \frac{3n^2-2n}{n+1}$으로 두면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n} + \frac{3n-2}{n+1}\right) = 0 + 3 = 3$

답 3

17

[풀이1]

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$로 둘 수 있다.

(단, α는 상수이다.)

수렴하는 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-1}{2a_n+1} = \frac{3\alpha-1}{2\alpha+1} = 1$ 풀면 $\alpha = 2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

답 2

[풀이2]

$\frac{3a_n-1}{2a_n+1} = b_n$으로 두면

$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$이고 $a_n = \frac{b_n+1}{3-2b_n}$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n+1}{3-2b_n} = \frac{1+1}{3-2\cdot 1} = 2$

답 2

18

[풀이]

(1) (거짓)

(반례) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1 - \frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$이다.

(2)

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$로 둘 수 있다.

(단, α는 상수)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\cdot a_n$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\cdot\lim_{n\to\infty} a_n = 2\cdot\alpha = 2\alpha$

답 (1) 거짓 (2) 참

3 등비수열의 극한

19

[풀이]

(1) $-\frac{5}{4} \le -1$이므로 주어진 등비수열은 진동하면서 발산한다.

(2) $-1 < \left| -\frac{2}{3} \right| < 1$이므로 주어진 등비수열은 0에 수렴한다.

(3) $\frac{(\sqrt{3})^n}{2^{2n}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$이고, $-1 < \frac{\sqrt{3}}{4} < 1$이므로 주어진 등비수열은 0에 수렴한다.

(4) $\frac{3^{2n}}{5^n} = \left(\frac{9}{5}\right)^n$이고, $\frac{9}{5} > 1$이므로 주어진 등비수열은 발산한다.

답 (1) 발산 (2) 0 (3) 0 (4) 발산

20

[풀이]

(1) $-1 < 2x+1 \le 1$을 풀면 $-1 < x \le 0$

(2) $-1 < x^2 - x - 1 \le 1$을 풀자.

$x^2 - x > 0$, $x^2 - x - 2 \le 0$

$x(x-1) > 0$, $(x-2)(x+1) \le 0$

전자의 부등식을 풀면 $x < 0$ 또는 $x > 1$

후자의 부등식을 풀면 $-1 \le x \le 2$

구하는 x의 범위는

$-1 \le x < 0$ 또는 $1 < x \le 2$

답 (1) $-1 < x \le 0$

(2) $-1 \le x < 0$ 또는 $1 < x \le 2$

21

[풀이]

$x^{2n-1} = x \cdot (x^2)^{n-1}$이므로

등비수열 $\{x^{2n-1}\}$의 공비는 x^2이고,

$(1+x)^{n-1} = 1 \cdot (1+x)^{n-1}$이므로

등비수열 $\{(1+x)^{n-1}\}$의 공비는 $1+x$이다.

$-1 < x^2 \le 1$, $-1 < 1+x \le 1$

전자의 부등식을 풀면 $-1 \le x \le 1$,

후자의 부등식을 풀면 $-2 < x \le 0$

따라서 구하는 범위는

$-1 \le x \le 0$

답 $-1 \le x \le 0$

[참고]

수열 $\{x^{2n-1}\}$의 n번째 항과 $n+1$번째 항은 각각 x^{2n-1}, x^{2n+1}이므로 이 등비수열의 공비는

$$r = \frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}} = x^2$$

수열 $\{(1+x)^{n-1}\}$의 n번째 항과 $n+1$번째 항은 각각 $(1+x)^{n-1}$, $(1+x)^n$이므로 이 등비수열의 공비는

$$r = \frac{(1+x)^n}{(1+x)^{n-1}} = x+1$$

참고로 각각의 수열의 첫째항은 $n=1$을 대입하면 찾을 수 있다.

22

[풀이]

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

(2) $\lim_{n\to\infty} (5^n - 6^n)$

$$= \lim_{n\to\infty} 6^n\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1\right\} = -\infty$$

$\left(\because \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1\right\} = -1\right)$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{4^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \infty$

$(\because \lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=1)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$=\frac{0}{1-0}=0$

(5) $\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$

$(\because \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=1)$

(6) $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+(-2)^n\right\}$는 진동하면서 발산한다.

왜냐하면 수열 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 0에 수렴하지만 수열 $\{(-2)^n\}$은 진동하면서 발산하기 때문이다.

답 (1) 0 (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) 0
(5) ∞ (6) 진동(발산)

23

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(>1)$이라고 하자.

만약 $a_1=0$이면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 0이므로

분수 $\frac{S_n}{a_n}$의 분모가 0이 된다. 따라서 $a_1\neq 0$

일반항 a_n은

$a_n=a_1r^{n-1}$

등비수열의 합의 공식에 의하여

$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}{a_1r^{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{(r-1)r^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n-r^{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1-\frac{1}{r}}=\frac{1}{1-\frac{1}{r}}=\frac{r}{r-1}=\frac{11}{10}$

$\therefore\ r=11$

답 11

24

[풀이]

(1)

(ⅰ) $|r|>1$일 때,

$0<\left|\frac{1}{r}\right|<1$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{r}{0+1}=r$

(ⅱ) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(ⅲ) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$

(2)

(ⅰ) $|r|>1(|r^2|>1)$일 때,

$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^{2n}}-1}{\frac{1}{r^{2n}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

(ⅱ) $r=1$ 또는 $r=-1(|r^2|=1)$일 때,

$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$

(ⅲ) $|r|<1(|r^2|<1)$일 때,

$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

25

[풀이]

$$\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}=\frac{\left(\frac{r}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{r}{3}\right)^n+1}$$

에서 $\frac{r}{3}$의 범위를 다음과 같이 나누자.

$\left|\frac{r}{3}\right|>1$, $\frac{r}{3}=1$, $\left|\frac{r}{3}\right|<1$

(ⅰ) $\left|\frac{r}{3}\right|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{r}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ⅱ) $\frac{r}{3}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{r}{3}\right)^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(ⅲ) $\left|\frac{r}{3}\right|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{r}{3}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

답 풀이참조

26

[풀이]

(ⅰ) $a>b(>0)$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$=\frac{a+0}{1+0}=a$$

(ⅱ) $a=b(>0)$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{n+1}}{2a^n}=\lim_{n\to\infty}a=a$$

(ⅲ) $(0<)a<b$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+b}{0+1}=b$$

답 풀이참조

27

[풀이]

$10^n=2^n5^n$이므로

$f(n)=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n)$

$\times(5^0+5^1+5^2+\cdots+5^n)$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\cdot\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$$

$$=\frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{10^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{10^{n+1}-2^{n+1}-5^{n+1}+1}{10^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(10-2\left(\frac{1}{5}\right)^n-5\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

$$=\frac{10-0-0+0}{4}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

28

[풀이]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{2023}{2024}$, $\frac{a_3}{a_2} \le \frac{2023}{2024}$, $\frac{a_4}{a_3} \le \frac{2023}{2024}$,

$\cdots$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{2023}{2024}$

위의 부등식을 변변히 모두 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1}\,\frac{a_3}{a_2}\,\frac{a_4}{a_3}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$$

정리하면

$$\frac{a_n}{a_1} \le \left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$$

즉, $0 < a_n \le a_1\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_1\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1} = 0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+n-2}{4a_n+3n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{a_n}{n}+1-\frac{2}{n}}{4\frac{a_n}{n}+3+\frac{1}{n}} = \frac{0+1-0}{0+3+0} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

I 수열의 극한

❷ 급수

1 급수

29

[풀이]

제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하자.

(1) $S_n = \frac{2+2n}{2}\cdot n = n^2+n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(n^2+n) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

(2) $S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \frac{3}{2}$$

답 (1) 양의 무한대로 발산 (2) $\frac{3}{2}$에 수렴

30

[풀이]

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\boxed{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\boxed{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots\right.$

$\left. + \left(\frac{1}{n-1}\boxed{-\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{n}\boxed{-\frac{1}{n+2}}\right)\right\}$

(←위에서 1, $\frac{1}{2}$은 각각 가장 왼쪽에서 첫 번째 수와 세 번째 수이고,

$-\frac{1}{n+2}$, $-\frac{1}{n+1}$은 가장 오른쪽에서 첫 번째 수

Ⅲ 다항함수의 미분법

9 다항함수의 그래프

01

[풀이]

(1) (참)

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$와 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)+g'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다. 따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

(2) (참)

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$와 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)+g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다. 따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

(3) (참)

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $x=a$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로(즉, $-g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)-g'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

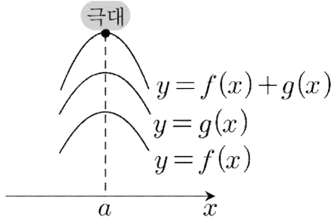
(4) (참)

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x=a$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로(즉, $-g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)-g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

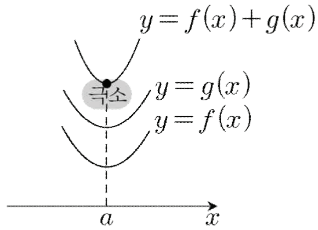
[참고]

(1)



충분히 작은 양수 h에 대하여 구간 $(a-h,\ a+h)$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 함숫값이 가장 클 때는 $x=a$이다. 따라서 이 구간에서 함수 $f(x)+g(x)$의 함숫값이 가장 클 때는 $x=a$이다.

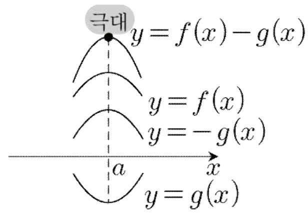
(2)



충분히 작은 양수 h에 대하여 구간 $(a-h,\ a+h)$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 함숫값이 가장 작을 때는 $x=a$이다.

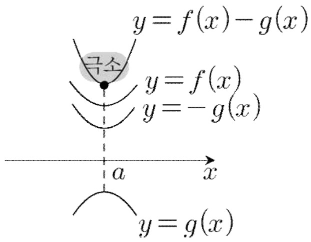
따라서 이 구간에서 함수 $f(x)+g(x)$의 함숫값이 가장 작을 때는 $x=a$이다.

(3)



충분히 작은 양수 h에 대하여 구간 $(a-h,\ a+h)$에서 함수 $f(x)$의 함숫값이 가장 크고, 함수 $g(x)$의 함숫값이 가장 작을 때는($-g(x)$의 함숫값이 가장 클 때는) $x=a$이다. 따라서 이 구간에서 함수 $f(x)-g(x)$의 함숫값이 가장 클 때는 $x=a$이다.

(4)



충분히 작은 양수 h에 대하여 구간 $(a-h,\ a+h)$

에서 함수 $f(x)$의 함숫값이 가장 작고, 함수 $g(x)$의 함숫값이 가장 클 때는($-g(x)$의 함숫값이 가장 작을 때는) $x=a$이다. 따라서 이 구간에서 함수 $f(x)-g(x)$의 함숫값이 가장 작을 때는 $x=a$이다.

02

[풀이] ★

다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 연속이다.

▸ ㄱ. (참)

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x\to -0} h(x) = \lim_{x\to -0} g(x) = g(0)$

$= f(0) = h(0)$

$\therefore\ f(0)=g(0)$

▸ ㄴ. (참)

보기 ㄱ의 결과에서

$f(0)=g(0)=h(0)$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)$$

$f'(0)=g'(0)$이면 $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}$은 수렴한다.

따라서 미분계수의 정의에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

▸ ㄷ. (참)

(1) $f'(0)<0$ 이고 $g'(0)>0$인 경우

$x=0$의 좌우에서 함수 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

(2) $f'(0)>0$ 이고 $g'(0)<0$인 경우

$x=0$의 좌우에서 함수 $h'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

(1), (2)에서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고] ★

만약 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이라는 조건이 없다면 ㄴ은 거짓이다.

03

[풀이]

점 A의 좌표는

$\mathrm{A}(t,\ t^4-4t^3+10t-30)$

점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(t,\ 2t+2)$

함수 $f(t)$의 방정식은

$f(t)=|$(점 A의 y좌표)$-$(점 B의 y좌표)$|$

$=|t^4-4t^3+8t-32|$

$g(t)=t^4-4t^3+8t-32$로 두자.

함수 $g(t)$의 도함수는

$g'(t)=4t^3-12t^2+8=4(t-1)(t^2-2t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=1\pm\sqrt{3}$

$t=1$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 -27이다.

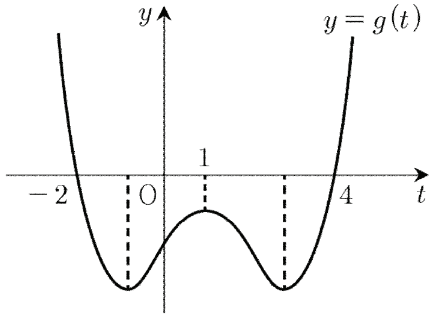
$t=1-\sqrt{3}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=1-\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 -36이다.

$t=1+\sqrt{3}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=1+\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 -36이다.

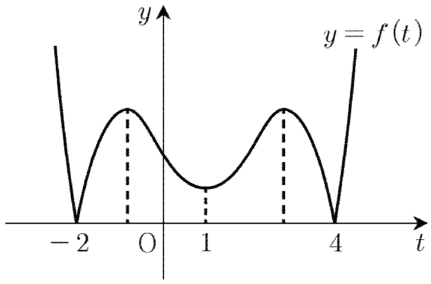
$g(t)=(t-4)(t+2)(t^2-2t+4)=0$에서

$t=-2$ 또는 $t=4$

함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $f(t)$의 그래프는



함수 $f(t)$는 $t=-2$, $t=4$에서 미분가능하지 않다.
함수 $f(t)$는 $t=-2$, $t=1$, $t=4$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $f(t)$는 $t=1-\sqrt{3}$, $t=1+\sqrt{3}$에서 극댓값을 갖는다.
(1) 함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 경우

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$
$$<0$$

함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않더라도
$x=t$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 된다.
즉, $x=t$에서 미분가능하지 않지만 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우이다.
부등식의 해집합을 A라고 하면 $A=\{-2,\ 4\}$
(2) 함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능한 경우

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$
$$=0$$

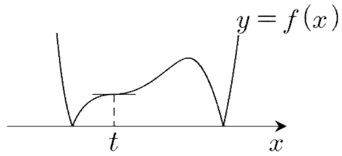
미분계수의 정의에 의하여
$f'(t)\times f'(t)=0$
즉, $\{f'(t)\}^2=0$ 풀면 $f'(t)=0$
방정식의 해집합을 B라고 하면
$B=\{1-\sqrt{3},\ 1,\ 1+\sqrt{3}\}$
(1), (2)에서 문제에서 주어진 부등식의 해집합은
$A\cup B=\{-2,\ 1-\sqrt{3},\ 1,\ 1+\sqrt{3},\ 4\}$

따라서 구하는 값은 5이다.
답 ④

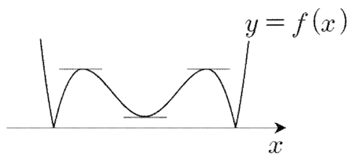
[참고]
다음과 같은 사고과정을 거쳐야 이 문제를 정확하게 해석한 것이다.
전체를 다음과 같이 두 경우로 구분해야 한다.
❶ 함수 $f(x)$가 미분가능한 경우
만약 함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능하면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

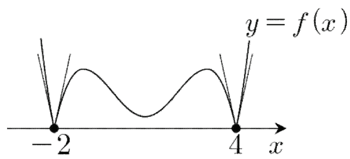
이고, 문제에서 주어진 부등식을 정리하면
$\{f'(t)\}^2\le 0$에서 $f'(t)=0$
($\because$ 모든 실수 a에 대하여 $a^2\ge 0$이다.
(단, 등호는 $a=0$일 때 성립한다.)
이므로 $a^2\le 0$이면 $a=0$일 수 밖에 없다.)
이때, 점 $(t,\ f(t))$가 반드시 극점은 것은 아니다.
만약 함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같으면 점 $(t,\ f(t))$는 극점이 아니다.



하지만 문제에서 주어진 사차함수 $f(x)$의 극점의 개수는 3이므로(즉, 이 함수가 극대점과 극소점을 모두 가지므로) $f'(t)=0$을 만족시키는 3개의 점은 모두 극점이다.



❷ 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 경우



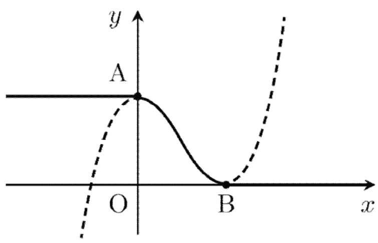
곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 두 점 $(-2,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 제외한 모든 점에서 함수 $f(x)$는 미분가능하다.
$t=-2$일 때,

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}<0,$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}>0$$
이므로 $t=-2$는 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.
(위의 그림처럼 접선의 기울기가 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다.)
$t=4$일 때,
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}<0,$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}>0$$
이므로 $t=4$는 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.
(위의 그림처럼 접선의 기울기가 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다.)

04

▶ 실전풀이: [풀이]+[참고1], [풀이]+[참고2], [풀이]+[참고4]

[풀이]

실수 전체에서 정의된 함수를 다음과 같이 두자.
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x>1)\\ ax^3+bx^2+cx+1 & (0\le x\le 1)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$$
상수함수 $y=0$과 $y=1$,
함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$
은 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면
함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=1$에서 연속이어야 한다.
함수의 연속의 정의에 의하여
$\lim_{x\to 0-}f(x)=1=f(0)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
함수의 연속의 정의에 의하여
$$\lim_{x\to 1+}f(x)=0=a+b+c+1=f(1)$$
즉, $a+b+c+1=0$ $\cdots$ ㉠
상수함수 $y=0$과 $y=1$,
함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$
은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=1$에서 미분가능해야 한다.
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}(ah^2+bh+c)=c$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{0}{h}=0$$
미분계수의 정의에 의하여
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
이므로
$c=0$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $b=-a-1$
함수 $f(x)$의 방정식은
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x>1)\\ ax^3-(a+1)x^2+1 & (0\le x\le 1)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{0}{h}=0$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\{ah^2+(2a-1)h+a-2\}$$
$$=a-2$$
미분계수의 정의에 의하여
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$a-2=0$ 즉, $a=2$ $\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2$, $b=-3$, $c=0$
함수 $f(x)$의 방정식은
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x>1)\\ 2x^3-3x^2+1 & (0\le x\le 1)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$$


$\therefore\ a^2+b^2+c^2=13$

답 13

[참고1] +미적분1(부정적분)

삼차함수의 방정식을 부정적분을 이용하여 구할 수도 있다.

위의 그림처럼 삼차함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$의 극대점과 극소점은 각각 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$이므로

$f'(x)=3ax(x-1)$

부정적분의 정의에 의하여

$f(x)=\int f'(x)dx=ax^3-\dfrac{3}{2}ax^2+C$

(단, C는 적분상수)

그런데 $f(0)=1$, $f(1)=0$이므로

$f(0)=C=1$, $f(1)=-\dfrac{a}{2}+C=0$

연립방정식을 풀면 $a=2$, $C=1$

주어진 삼차함수의 방정식은 $y=2x^3-3x^2+1$

[참고2]

다음과 같이 빠르게 문제를 해결할 수도 있다.

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 연속이므로

$f(0)=1$, $f(1)=0$

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하므로

$f'(0)=0$, $f'(1)=0$

$f(0)=1$은 항상 성립한다.

$f(1)=0$에서 $a+b+c+1=0$

$f'(0)=0$에서 $c=0$

$f'(1)=0$에서 $3a+2b+c=0$

위의 세 식을 연립하면

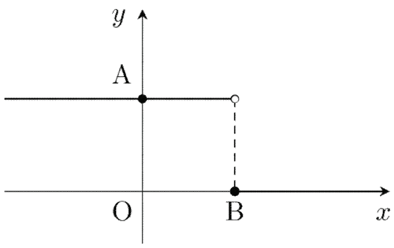
$a=2$, $b=-3$, $c=0$

[참고3] ★

함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$이 삼차함수인 이유는 다음과 같다.

(1) $y=ax^3+bx^2+cx+1$가 상수함수인 경우

$a=b=c=0$이고, $y=1$이다.

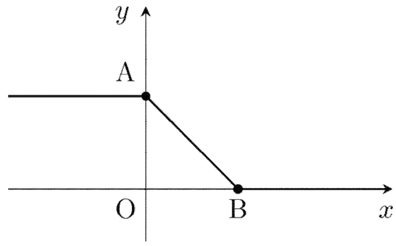


위의 그림처럼 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(2) $y=ax^3+bx^2+cx+1$가 일차함수인 경우

$a=b=0$이고, $y=cx+1$이다.

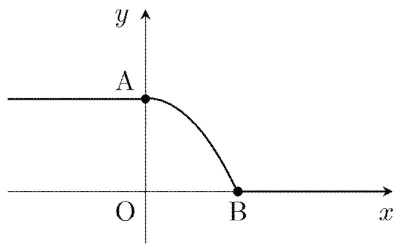
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $c=-1$이다.



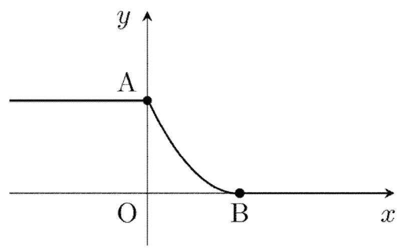
위의 그림처럼 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(3) $y=ax^3+bx^2+cx+1$가 이차함수인 경우

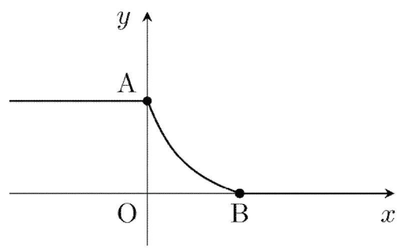
$a=0$이고, $y=bx^2+cx+1$이다.



함수 $f(x)$가 위의 그림과 같으면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.



함수 $f(x)$가 위의 그림과 같으면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

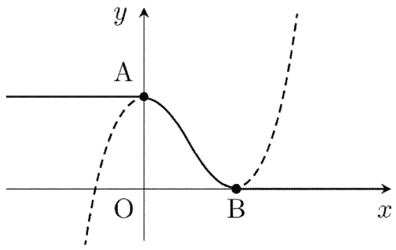


함수 $f(x)$가 위의 그림과 같으면 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않다.

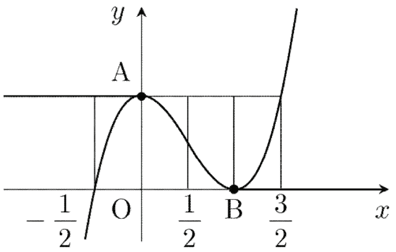
따라서 귀류법에 의하여

$y=ax^3+bx^2+cx+1$

은 삼차함수이고, $a\neq 0$이다.



[참고4] 교육과정 외 ★
삼차함수의 비례관계를 이용하면, 삼차함수의 방정식을 빠르게 유도할 수 있다.



위의 그림에서 삼차함수의 방정식은

$y=a(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$

그런데 이 함수의 그래프는 $(0,\ 1)$을 지나므로

$a\times 1\times\frac{1}{2}=1$에서 $a=2$

삼차함수의 방정식은

$y=(x-1)^2(2x+1)$

05

[풀이]

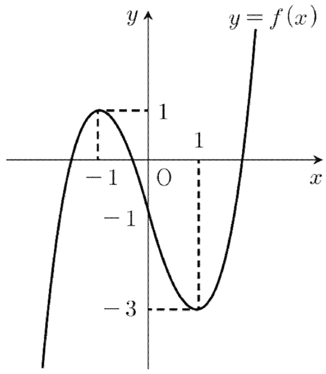
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

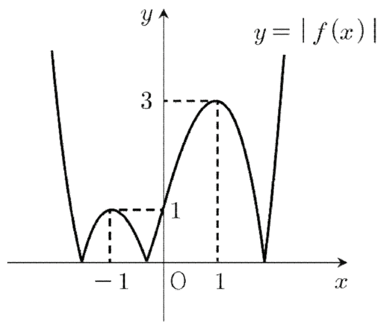
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

함수 $f(x)$의 그래프는



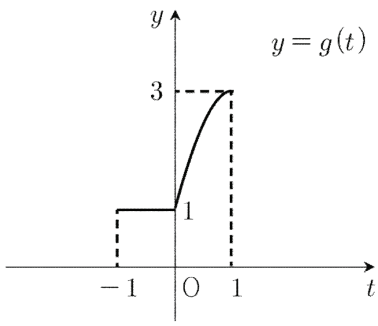
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는



구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 방정식은

$g(t)=\begin{cases}1 & (-1\le t\le 0)\\ -t^3+3t+1 & (0<t\le 1)\end{cases}$

구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 그래프는



정적분의 성질에 의하여

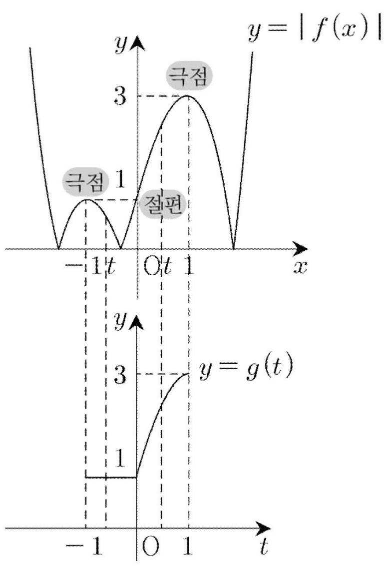
$\int_{-1}^{1}g(t)dt=\int_{-1}^{0}dt+\int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)dt$

$=[t]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1=\frac{13}{4}$

$\therefore\ p+q=17$

답 17

[참고]



(1) $-1 \le t \le 0$인 경우

구간 $[-1,\ t]$에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$일 때, 최댓값 1을 갖는다.

(2) $0 < t \le 1$인 경우

구간 $[-1,\ t]$에서 함수 $|f(x)|$는 $x = t$에서 최댓값 $|f(t)|$을 갖는다.

따라서 함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (-1 \le t \le 0) \\ -t^3 + 3t + 1 & (0 < t \le 1) \end{cases}$$

만약 함수 $f(x)$의 두 극점과 y절편을 좌표평면에 정확하게 표시하지 않았다면 함수 $|f(x)|$의 그래프가 부정확할 가능성이 높다. 함수 $|f(x)|$의 그래프가 정확하지 않으면 함수 $g(t)$의 그래프도 제대로 그릴 수 없다.

06

[풀이]

삼차방정식 $f'(x) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ 또는 $x^2 + ax + b = 0$

이차방정식

$x^2 + ax + b = 0 \qquad \cdots(*)$

은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이때, 두 실근 중 어느 것도 1이어서는 안된다.

(*)의 판별식을 D라고 하면

$D = a^2 - 4b > 0$

(*)에 $x=1$을 대입하였을 때 등호가 성립하지 말아야 하므로

$1 + a + b \ne 0$

답 $a^2 - 4b > 0,\ 1 + a + b \ne 0$

07

[풀이]

전체를 다음과 같은 세 경우로 구분할 수 있다.

세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 모두 같은 경우 → (1)

세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 중에서 오직 두 수만이 같은 경우 → (2), (3)

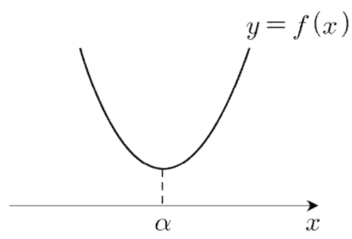
세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 모두 다른 경우 → (4)

(1) $\alpha = \beta = \gamma$인 경우

$f'(x) = (x-\alpha)^3$

함수 $f(x)$는 $x = \alpha$에서 극솟값을 가지므로

함수 $f(x)$의 그래프는

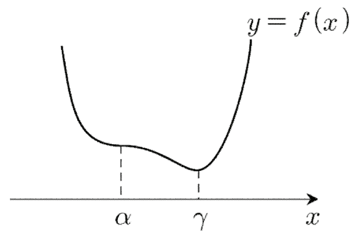


(2) $\alpha = \beta < \gamma$인 경우

$f'(x) = (x-\alpha)^2(x-\gamma)$

함수 $f(x)$는 $x = \gamma$에서 극솟값을 가지므로

함수 $f(x)$의 그래프는

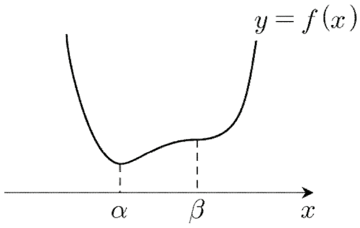


(3) $\alpha < \beta = \gamma$인 경우

$f'(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2$

함수 $f(x)$는 $x = \alpha$에서 극솟값을 가지므로

함수 $f(x)$의 그래프는

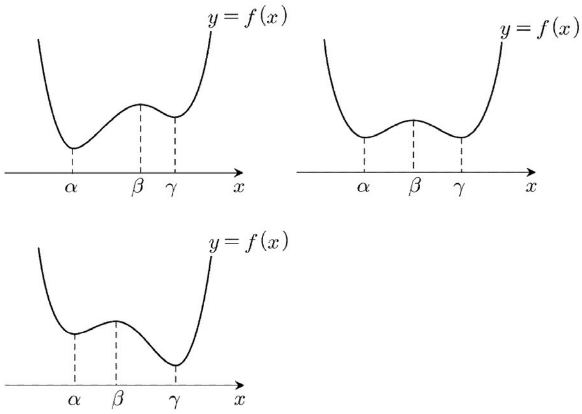


(4) $\alpha<\beta<\gamma$인 경우

$f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극솟값을 갖고, $x=\beta$에서 극댓값을 가지므로

함수 $f(x)$의 그래프는



08

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리기 위해서는 방정식

$f'(x)=0$ 즉, $(x-\alpha)(x^2+ax+b)=0\cdots(*1)$

을 풀어야 한다. 그러므로 이차방정식

$x^2+ax+b=0 \qquad \cdots(*2)$

의 근의 분리를 해야 한다.

이차방정식 (*2)의 판별식을 D라고 하자.

$D>0$인 경우: 방정식 (*2)는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 β, $\gamma(\beta<\gamma)$라고 하자.

(경우1) $\beta=\alpha(\gamma\neq\alpha)$인 경우: 방정식 (*1)의 실근을 모두 쓰면 α, α, γ

(경우2) $\gamma=\alpha(\beta\neq\alpha)$인 경우: 방정식 (*1)의 실근을 모두 쓰면 α, α, β

(경우3) $\beta\neq\alpha$, $\gamma\neq\alpha$인 경우: 방정식 (*1)의 실근을 모두 쓰면 α, β, γ

$D=0$인 경우: 방정식 (*2)는 중근을 갖는다. 이 중근을 β, β라고 하자.

(경우4) $\alpha=\beta$인 경우: 방정식 (*1)의 실근을 모두 쓰면 α, α, α

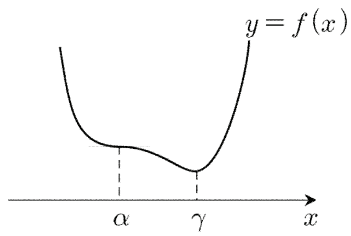
(경우5) $\alpha\neq\beta$인 경우: 방정식 (*1)의 실근을 모두 쓰면 α, β, β

$D<0$인 경우: 방정식 (*2)는 서로 다른 두 허근을 갖는다.

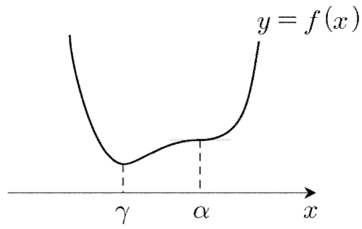
(경우6) 방정식 (*1)의 실근을 모두 쓰면 α

(경우1) $f'(x)=(x-\alpha)^2(x-\gamma)$ (단, $\alpha\neq\gamma$)

$\alpha<\gamma$인 경우



$\alpha>\gamma$인 경우



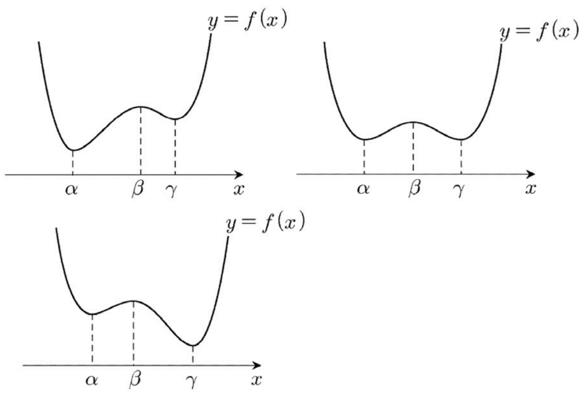
(경우2) $f'(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ (단, $\alpha\neq\beta$)

(경우1)과 마찬가지의 그래프의 개형을 얻는다.

(경우3) $f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

(단, $\alpha\neq\beta$, $\beta\neq\gamma$, $\gamma\neq\alpha$)

$\alpha<\beta<\gamma$인 경우

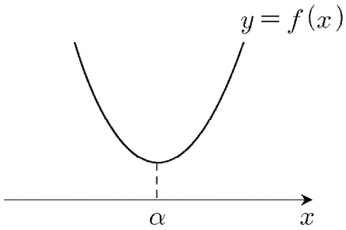


나머지 두 경우

$\beta<\alpha<\gamma$, $\beta<\gamma<\alpha$

에 대해서도 마찬가지의 그래프의 개형을 얻는다.

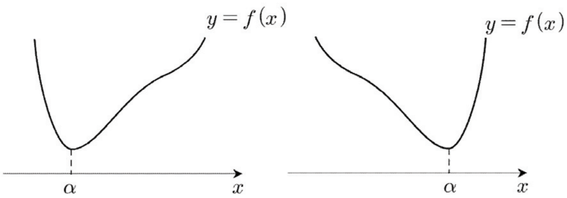
(경우4) $f'(x)=(x-\alpha)^3$



(경우5) $f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ (단, $\alpha\neq\beta$)

(경우1)과 마찬가지의 그래프의 개형을 얻는다.

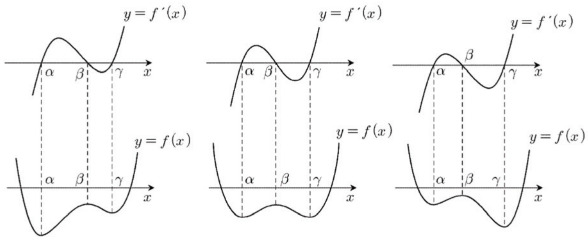
(경우6) $f'(x)=(x-\alpha)(x^2+ax+b)$



09

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[경우1] [경우2] [경우3]

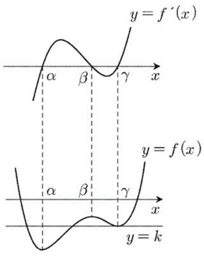
[경우1]: $f(\alpha)<f(\gamma)<f(\beta)$

[경우2]: $f(\alpha)=f(\gamma)<f(\beta)$

[경우3]: $f(\gamma)<f(\alpha)<f(\beta)$

ㄱ. (거짓)

(반례)

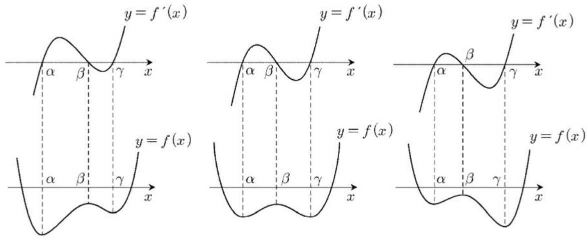


[경우1]

위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$과 직선 $y=k$ $(y=f(\gamma))$가 세 점에서 만나면 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 이때, k는 $f(x)$의 극솟값이다.

ㄴ. (참)

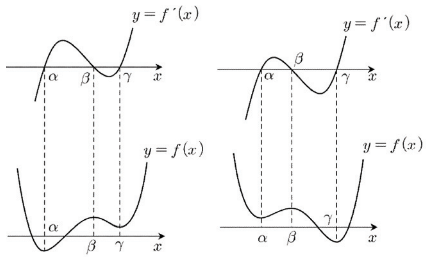
(1) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$가 모두 음수인 경우



[경우1] [경우2] [경우3]

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ 중에서 오직 한 개만 음수인 경우 (나머지 2개는 모두 양수)

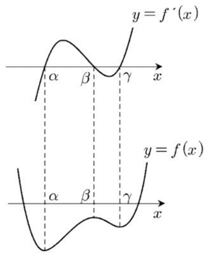


[경우1] [경우3]

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. (거짓)

(반례)



[경우1]

$f(\alpha)<0$, $f(\gamma)<0$이지만 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4가 아닌 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ①

10

[풀이]

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$로 두자.

(단, $a\neq 0$)

조건 (가)에서 주어진 항등식

$f(x)=f(-x)$

에 의하여 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

항등식의 필요충분조건에 의하여 $b=d=0$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^4+cx^2+e$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4ax^3+2cx=4ax\left(x^2+\dfrac{c}{2a}\right)$

방정식 $f'(x)=0$의 필요충분조건을 쓰면

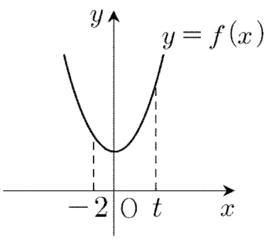
$x=0$ 또는 $x^2+\dfrac{c}{2a}=0$

(1) $\dfrac{c}{2a}\geq 0$인 경우

방정식 $f'(x)=0$을 풀면 $x=0$

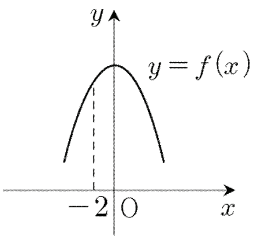
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

$a>0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그림처럼 닫힌구간 $[-2,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$인 실수 t가 존재한다.

$a<0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그림처럼 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$이다.

(2) $\dfrac{c}{2a}<0$인 경우

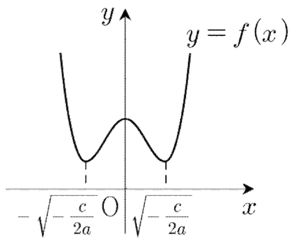
방정식 $f'(x)=0$을 풀면

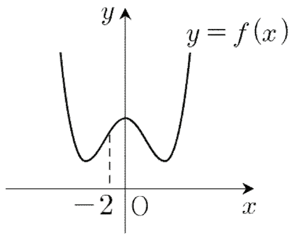
$x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

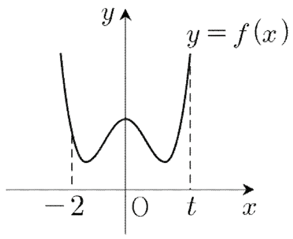
$x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}$에서 극값을 갖는다.

$a>0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



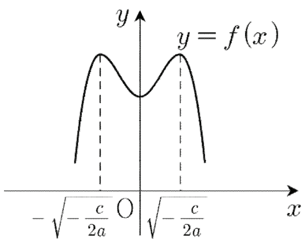


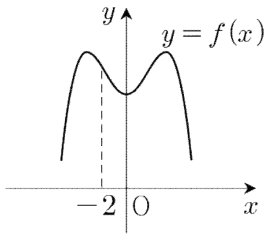
위의 그림처럼 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$이다.



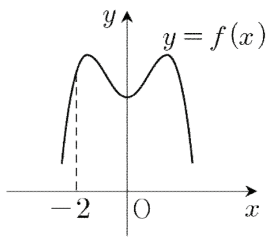
위의 그림처럼 닫힌구간 $[-2,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$인 실수 t가 존재한다.

$a<0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는

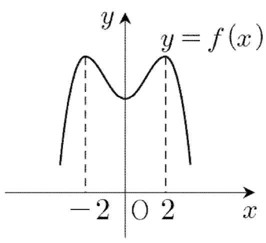




위의 그림처럼 닫힌구간 $\left[-2,\ \sqrt{-\dfrac{c}{2a}}\right]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}\right)$이다.



위의 그림처럼 닫힌구간 $\left[-2,\ -\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}\right]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(-\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}\right)$이다.



따라서 귀류법에 의하여 $-\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}=-2$일 수 밖에 없다. (위의 그림)

$-\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}=-2$의 양변을 제곱하여 정리하면

$c=-8a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^4-8ax^2+e \ \ (a<0)$

조건 (다)에서

$f(2)=16a-32a+e=-16a+e=32$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^4-8ax^2+16a+32$

방정식 $f(x)-f(0)=0$을 정리하면

$ax^4-8ax^2=0$

좌변을 인수분해하면

$ax^2(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$

풀면

$\alpha=-2\sqrt{2},\ \beta=0,\ \gamma=2\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=16$

답 ③

11

[풀이]

$f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=9x^2+2ax+b$

조건 (가)에서

$f'(1)=9+2a+b=0$ $\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값(극솟값)을 가지므로

$$f'(x)=9x^2+2ax+b=9\left(x+\frac{a}{9}\right)^2+b-\frac{a^2}{9}$$

에서 $-\dfrac{a}{9}=0$ 즉, $a=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $b=-9$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=3x^3-9x+c$

$c=f(0)$이므로 문제에서 주어진 방정식을 정리하면

$|3x^3-9x|=k$

이제 $g(x)=3x^3-9x$로 두자.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$

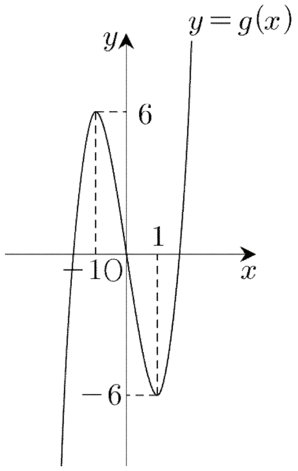
방정식 $g'(x)=0$을 풀면

$x=-1$ 또는 $x=1$

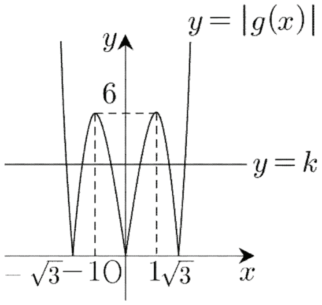
$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 6이다.

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

이때, 극솟값은 -6이다.
함수 $g(x)$의 그래프는



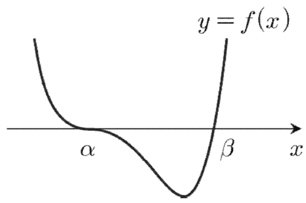
함수 $|g(x)|$의 그래프는



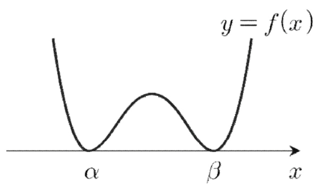
방정식 $|g(x)|=k$의 근의 분리를 하자.
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는
$k>6$이면 2,
$k=6$이면 4,
$0<k<6$이면 6,
$k=0$이면 3,
$k<0$이면 0이다.
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이다.
따라서 구하는 값은 15이다.
답 15

12

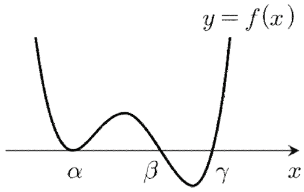
[풀이] ★
※ 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수 a로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$
(단, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)
▶ ㄱ. (참)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=a(x-\beta)g(x)+a(x-\alpha)g(x)$
$+a(x-\alpha)(x-\beta)g'(x)$
주어진 조건에서
$f'(\alpha)=a(\alpha-\beta)g(\alpha)=0$
그런데 $a>0$, $\alpha\neq\beta$이므로
$g(\alpha)=0$
함수 $g(x)$의 방정식을
$g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$
다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.
▶ ㄴ. (참)
$f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면
$f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\beta)=0$
(1) $f'(\alpha)=0$인 경우
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$
$\alpha=\gamma$일 때, $f(x)=0$의 해집합은
$\{\alpha, \beta\}$
예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

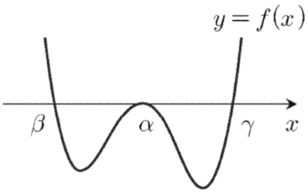


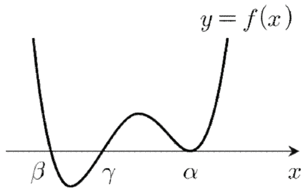
$\beta=\gamma$일 때, $f(x)=0$의 해집합은
$\{\alpha, \beta\}$
예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\alpha\neq\gamma$이고 $\beta\neq\gamma$일 때, $f(x)=0$의 해집합은
$\{\alpha, \beta, \gamma\}$
예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.







방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.

(2) $f'(\beta)=0$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로

방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

$f'(\alpha)=a(\alpha-\beta)g(\alpha)$

$f'(\beta)=a(\beta-\alpha)g(\beta)$

이므로

$f'(\alpha)f'(\beta)=-a^2(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)>0$

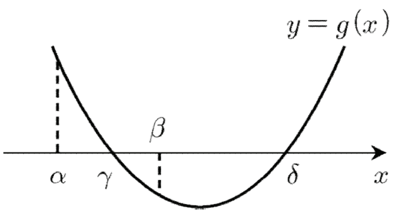
$-a^2(\alpha-\beta)^2<0$이므로 $g(\alpha)g(\beta)<0$

이차함수 $g(x)$는 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고

$g(\alpha)<0$, $g(\beta)>0$ 또는 $g(\alpha)>0$, $g(\beta)<0$

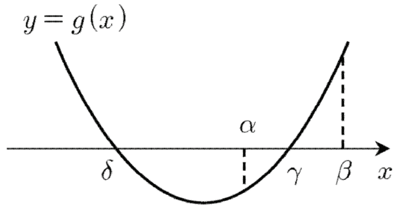
이므로 사이값 정리에 의하여

$g(\gamma)=0$인 γ가 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 적어도 하나 존재한다.



위의 그림에서 $g(x)=0$은 γ와 다른 실근을 갖는다.

이때, 또 다른 실근을 δ라고 하자.



위의 그림에서 $g(x)=0$은 γ와 다른 실근을 갖는다.

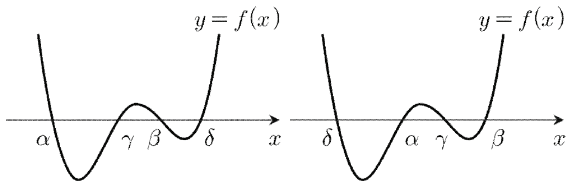
이때, 또 다른 실근을 δ라고 하자.

방정식 $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

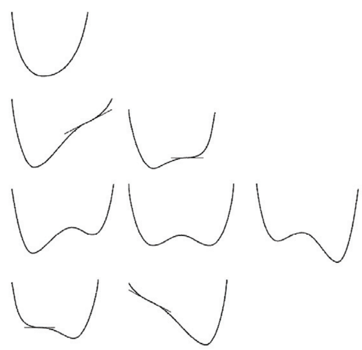
답 ⑤

[참고]

ㄴ, ㄷ에 대한 기하학적 풀이(빠른 풀이)는 다음과 같다.

※ 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

우선 최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다. (총8가지)

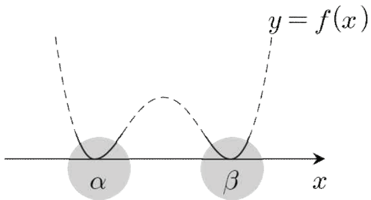


ㄴ. (참)

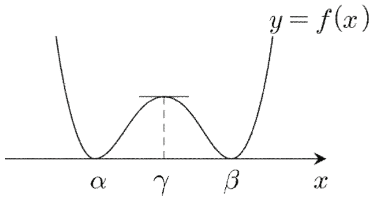
$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(\alpha,\ 0)$을 지나고 이 점에서의 접선의 기울기는 0이다.

$f(\beta)=f'(\beta)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(\beta,\ 0)$을 지나고 이 점에서의 접선의 기울기는 0이

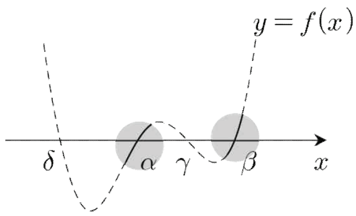
다.
따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$의 좌우에서 다음과 같이 그려질 수밖에 없다.



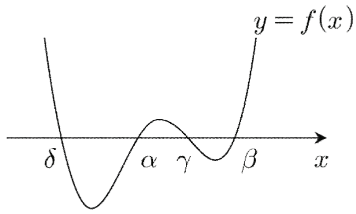
곡선 $y=f(x)$의 나머지 부분을 마저 그리면 다음과 같다.



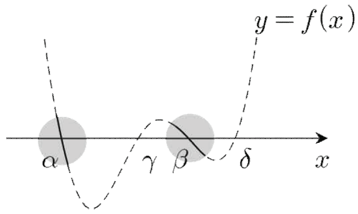
사이값 정리에 의하여 $f'(\gamma)=0$인 γ가 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.
$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$
이므로 사차함수 $f(x)$는 극대점과 극소점을 모두 갖는다. 따라서 이 함수의 그래프는 위와 같을 수 밖에 없다.
ㄷ. (참)
$f(\alpha)=f(\beta)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$을 지난다.
아래의 필요충분조건이 성립한다.
$f'(\alpha)f'(\beta)>0$
$\Leftrightarrow$
$f'(\alpha)>0,\ f'(\beta)>0$ $\cdots$(경우1)
또는
$f'(\alpha)<0,\ f'(\beta)<0$ $\cdots$(경우2)
(경우1)
곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 모두 양(+)이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$의 좌우에서 다음과 같이 그려질 수밖에 없다.



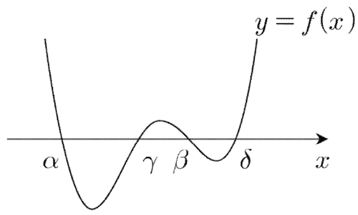
그런데 $x=\delta$와 $x=\gamma$에서 곡선 $y=f(x)$는 반드시 감소해야 한다. (그래야 사차함수의 그래프의 개형이 그려진다.)
따라서 곡선 $y=f(x)$의 나머지 부분을 마저 그리면 다음과 같다.



(경우2)
곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 모두 음(−)이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$의 좌우에서 다음과 같이 그려질 수밖에 없다.



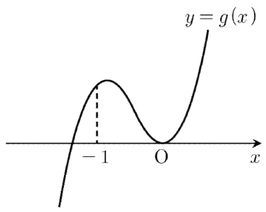
그런데 $x=\delta$와 $x=\gamma$에서 곡선 $y=f(x)$는 반드시 증가해야 한다. (그래야 사차함수의 그래프의 개형이 그려진다.)
따라서 곡선 $y=f(x)$의 나머지 부분을 마저 그리면 다음과 같다.



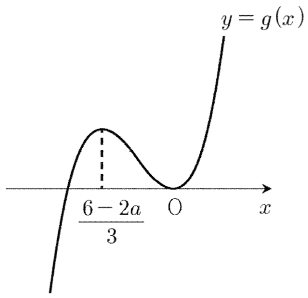
13

▶ 실전풀이: [풀이3]
[풀이1]
조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f(0)=c=b=f'(0)$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$
$g(x)=f(x)-f'(x)$으로 두면
$g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$
$g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 원점을 지난다.
조건 (다)에 의하여
$x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0\cdots$(*)
만약 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 증가하면
$x=0$의 좌우에서 함수 $g(x)$의 부호가 음에서 양으로 변하므로 (*)가 성립하지 않는다.
만약 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 감소하면
$x=0$의 좌우에서 함수 $g(x)$의 부호가 양에서 음으로 변하므로 (*)가 성립하지 않는다.
만약 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지면 (*)가 성립하지 않는다.
따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가져야 한다.



함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$
$g'(0)=b-2a=0$에서 $b=2a$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=x^3+(a-3)x^2$
함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=3x^2+2(a-3)x$
$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{6-2a}{3}$



함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이므로
$\dfrac{6-2a}{3}<0$ 즉, $a>3$
조건 (다)에서
$g(-1)=a-4\geq 0$ 즉, $a\geq 4$
a의 범위는
$a\geq 4$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$
$\therefore\ f(2)=10a+8\geq 48$
답 ⑤

[풀이2]
조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 (나)에서
$f(0)=c=b=f'(0)$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$
$g(x)=f(x)-f'(x)$으로 두면
$g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$
$=x\{x^2+(a-3)x+b-2a\}$
조건 (다)에서
$x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이다.
$h(x)=x^2+(a-3)x+b-2a$로 두면
$g(x)=xh(x)$
$-1\leq x<0$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\geq 0$이기 위해서는
$-1\leq x<0$인 모든 실수 x에 대하여
$h(x)\leq 0$이어야 한다.
$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이기 위해서는
$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$이어야 한다.
그런데 다항함수 $h(x)$는 연속함수이므로
사이값 정리에 의하여
$h(0)=0$
$h(0)=b-2a=0$에서 $b=2a$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$

$x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x) \geq 0$이기 위해서는

$x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여

$x+a-3 \geq 0$이어야 한다.

a의 범위는 $a \geq 4$

함수 $f(x)$의 방정식은

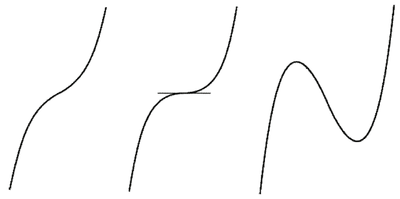
$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$

$\therefore\ f(2)=10a+8 \geq 48$

답 ⑤

[풀이3] ★

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.

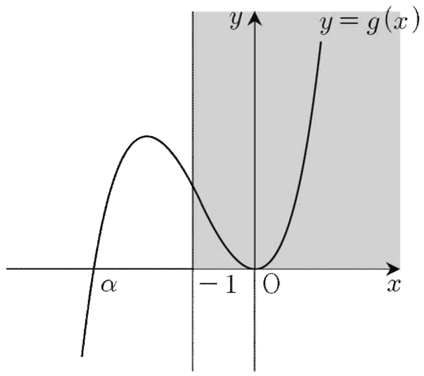


$g(x)=f(x)-f'(x)$로 두자.

조건 (나)에서 $g(0)=0$

조건 (다)에서 $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 0$이다.

함수 $g(x)$의 그래프가 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려져야 하므로, 함수 $g(x)$의 그래프는 원점에서 x축에 접해야 한다. 따라서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 중에서 원점이 아닌 점의 x좌표를 α라고 하자.

인수정리에 의하여

$g(x)=x^2(x-\alpha)$ (단, $\alpha \leq -1$)

조건 (다)에 의하여

$g(-1)=-1-\alpha \geq 0$ 즉, $\alpha \leq -1$

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$

$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x+c-b$

$=x^3-\alpha x^2$

계수비교를 하면

$a=3-\alpha,\ b=2a,\ c=b$

a의 범위는 $a \geq 4$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$

$\therefore\ f(2)=8+10a \geq 48$

답 ⑤

14

▶ 실전풀이: [풀이2]

[풀이1]

주어진 부등식에서

$2x-f(1) \leq f(x)-f(1)$

주어진 조건에서 $f(1)=2$이므로

$2x-2 \leq f(x)-f(1)$ $\cdots(*)$

(*)의 양변을 양수 $x-1$로 나누면

$$\frac{2x-2}{x-1} \leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 1+}\frac{2x-2}{x-1}=2$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

함수의 극한값의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 1+}\frac{2x-2}{x-1} \leq \lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

즉, $2 \leq f'(1)$

(*)의 양변을 음수 $x-1$로 나누면

$\dfrac{2x-2}{x-1} \geq \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

함수의 극한의 성질에 의하여

$\displaystyle\lim_{x \to 1-} \frac{2x-2}{x-1} = 2$

미분계수의 정의에 의하여

$\displaystyle\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

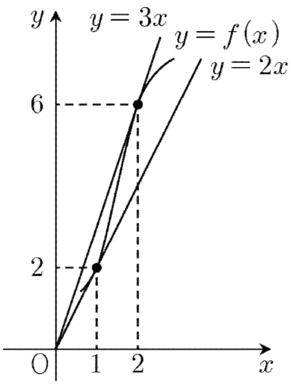
함수의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\displaystyle\lim_{x \to 1-} \frac{2x-2}{x-1} \geq \lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

즉, $2 \geq f'(1)$

$2 \leq f'(1) \leq 2$이므로 $f'(1) = 2$

마찬가지의 방법으로 $f'(2) = 3$

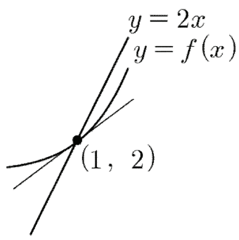


$\therefore \ f'(1) + f'(2) = 5$

답 ④

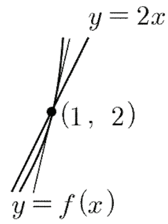
[풀이2] ★

귀류법을 이용하여 문제를 해결해도 좋다.



위의 그림처럼 $f'(1) < 2$이라고 가정하자.

$x > 1$인 어떤 x에 대하여 $f(x) < 2x$이므로 문제에서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

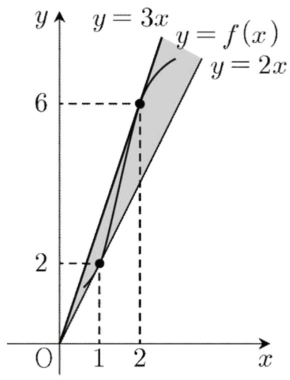


위의 그림처럼 $f'(1) > 2$이라고 가정하자.

$x < 1$인 어떤 x에 대하여 $f(x) < 2x$이므로 문제에서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f'(1) = 2$이다.

마찬가지의 방법으로 $f'(2) = 3$이다.



함수 $f(x)$의 그래프는 $x=1$에서 직선 $y=2x$에 접하고,

$x=2$에서 직선 $y=3x$에 접해야 한다.

$\therefore \ f'(1) + f'(2) = 5$

답 ④

15

▶ 실전풀이: [풀이2]+[참고3]

[풀이1]

평행이동의 관점에서 $\alpha = 0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

$h(x) = f(x) - g(x)$로 두자.

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

조건 (가), (나)에서

$h(0) = 0, \ h'(0) = 0, \ h'(\beta) = 0$

이므로

$h(0)=c=0$, $h'(0)=b=0$,

$h'(\beta)=3\beta^2+2a\beta+b=0$

위의 세 식을 연립하면

$a=-\frac{3}{2}\beta$, $b=0$, $c=0$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-\frac{3}{2}\beta x^2$

이제 함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=2x^2+dx+e$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=4x+d$

조건 (가), (나)에서

$g'(0)=-16$, $g'(\beta)=16$

이므로

$g'(0)=d=-16$, $g'(\beta)=4\beta+d=16$

위의 두 식을 연립하면

$d=-16$, $\beta=8$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-12x^2$

$\therefore\ g(\beta+1)-f(\beta+1)$

$=g(9)-f(9)=-h(9)=243$

답 243

[참고1]

부정적분을 이용하여 함수 $h(x)$의 방정식을 유도해도 좋다.

조건 (가), (나)에서

$h(0)=0$, $h'(0)=0$, $h'(\beta)=0$

이므로

$h'(x)=3x(x-\beta)=3x^2-3\beta x$

부정적분을 구하면

$h(x)=x^3-\frac{3}{2}\beta x^2+C$(단, C는 적분상수)

$h(0)=C=0$이므로 함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-\frac{3}{2}\beta x^2$

조건 (가), (나)에서

$g'(0)=-16$, $g'(\beta)=16$

이므로

$g'(x)=4x-16(\because g'(0)=-16)$

$g'(\beta)=4\beta-16=16$에서 $\beta=8$

따라서 함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-12x^2$

[풀이2]

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두면

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

조건 (가), (나)에서

$g'(\alpha)\neq g'(\beta)$이므로 $\alpha\neq\beta$이다.

왜냐하면 일차함수 $g'(x)$는 일대일대응이기 때문이다.

조건 (가), (나)에서

$h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)=0$, $h'(\beta)=0$

인수정리에 의하여

$h(x)=(x-\alpha)Q(x)$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=Q(x)+(x-\alpha)Q'(x)$

$h'(\alpha)=Q(\alpha)=0$,

$h'(\beta)=Q(\beta)+(\beta-\alpha)Q'(\beta)=0$

인수정리에 의하여 함수 $Q(x)$의 방정식을

$Q(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

함수 $Q(x)$의 도함수는

$Q'(x)=2x-\alpha-\gamma$

이므로

$h'(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha-\gamma)=0$

정리하면

$(\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-2\gamma)=0$

$\beta\neq\alpha$이므로 $\gamma=\frac{3\beta-\alpha}{2}$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ (단, $\alpha\neq\beta$)

이제 함수 $g(x)$의 방정식을

$g'(x)=4x+k$

($\because$ 이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로 $g(x)$의 최고차항의 계수는 4이다.)

조건 (가), (나)에서

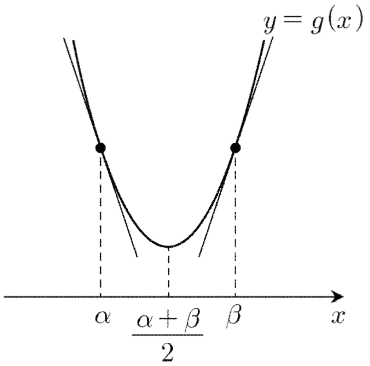
$g'(\alpha)=-16$, $g'(\beta)=16$

이므로

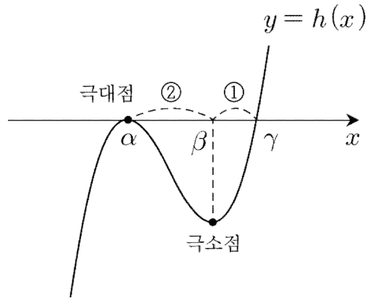
$g'(\alpha)=4\alpha+k=-16$, $g'(\beta)=4\beta+k=16$
위의 두 등식의 양변을 변변히 빼면
$\beta-\alpha=8$
$\therefore\ g(\beta+1)-f(\beta+1)$
$=-h(\beta+1)=-(\beta-\alpha+1)^2\left(1+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$=-9^2\times(-3)=243$
답 243

[참고2]
함수 $h(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도해도 좋다.
$h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)=0$이므로 인수정리에 의하여
함수 $h(x)$의 방정식을
$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\gamma)$
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=(x-\alpha)(3x-\alpha-2\gamma)$
$h'(\beta)=0$이므로
$h'(\beta)=(\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-2\gamma)=0$
풀면 $\gamma=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}(\because \alpha\neq\beta)$
함수 $h(x)$의 방정식은
$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ (단, $\alpha\neq\beta$)

[참고3] ★
이차함수와 삼차함수의 그래프가 가지고 있는 성질을 이용하여 두 함수 $h(x)$, $g(x)$의 방정식을 빠르게 유도할 수도 있다.
조건 (가), (나)에서
$g'(\alpha)=-16$, $g'(\beta)=16$

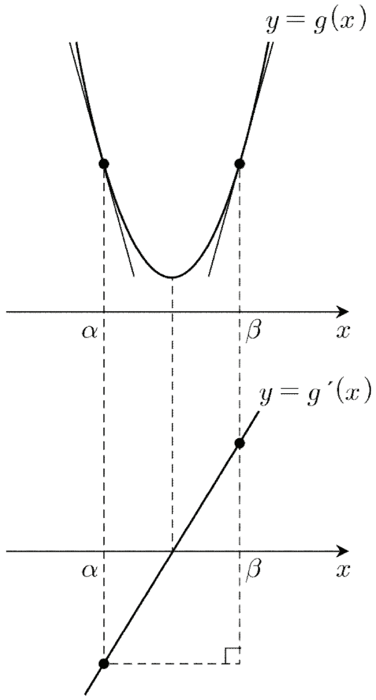


이차함수 $g(x)$의 대칭축은 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이므로
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=2\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+c$(단, c는 상수)
조건 (가), (나)에서
$h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)=0$, $h'(\beta)=0$
함수 $h(x)$의 그래프는



(단, $h(\gamma)=0$)
내분점의 공식에 의하여
$\beta=\dfrac{\alpha+2\gamma}{3}$이므로 $\gamma=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$
함수 $h(x)$의 방정식은
$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ (단, $\beta>\alpha$)

[참고4] ★
$\beta-\alpha$의 값을 다음과 같은 방법으로 구해도 좋다.



이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로
일차함수 $g'(x)$의 최고차항의 계수는 4이다.

일차함수 $g'(x)$의 기울기는 4이므로

$$\frac{g'(\beta)-g'(\alpha)}{\beta-\alpha}=4 \text{ 즉, } \frac{16-(-16)}{\beta-\alpha}=4$$

$\therefore\ \beta-\alpha=8$

[참고5] ★

$\alpha=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는 이유는 다음과 같다.

▸ 문제에서 주어진 모든 함수의 그래프와 점을 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼 평행이동하자.

(문제) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x+\alpha)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x+\alpha)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)$이고 $f'(0)=g'(0)=-16$이다.

(나) $f'(\beta-\alpha)=g'(\beta-\alpha)=16$인 실수 $\beta-\alpha$가 존재한다.

$g(\beta-\alpha+1)-f(\beta-\alpha+1)$의 값을 구하시오.

▸ $f(x+\alpha)=f_0(x)$, $g(x+\alpha)=g_0(x)$, $\beta-\alpha=\gamma$로 두자.

(문제) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f_0(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g_0(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)$이고 $f'(0)=g'(0)=-16$이다.

(나) $f'(\gamma)=g'(\gamma)=16$인 실수 γ가 존재한다.

$g(\gamma+1)-f(\gamma+1)$의 값을 구하시오.

16

[풀이]

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두자.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 점 P에서 만나므로

$f(t)=g(t)$ 즉, $f(t)-g(t)=0$ $\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 같으므로

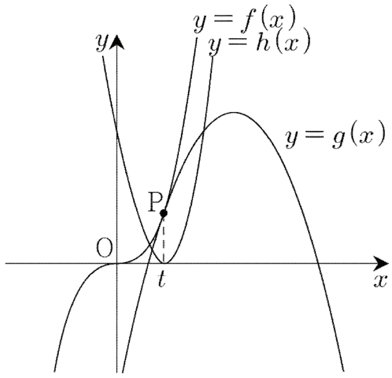
$f'(t)=g'(t)$ 즉, $f'(t)-g'(t)=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$h(t)=0$, $h'(t)=0$

이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 점 $(t,\ 0)$에서 x축에 접한다.

이때, 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 그래프를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.



17

[풀이1] ★

함수의 연속의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1-}f(x)=a+b=c+\frac{5}{2}=f(1)$$

즉, $a+b=c+\dfrac{5}{2}$ $\cdots$ ㉠

좌표평면에서 점 $(p,\ q)$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점이라고 하자.

$f(p)=q$, $f^{-1}(p)=q$

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(q)=p$, $f(q)=p$

이므로 점 $(q,\ p)$는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 모두 지난다.

문제에서 주어진 함수 $f(x)$의 방정식에서

$$f(-1)=-a+b,\ f(1)=c+\frac{5}{2},\ f(2)=4c+5$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점의 개수가 3이므로

$$\{-1,\ 1,\ 2\}=\left\{-a+b,\ c+\frac{5}{2},\ 4c+5\right\}$$

일 수 밖에 없다.

연속함수 $f(x)$가 역함수를 가지므로

함수 $f(x)$는 증가함수 또는 감소함수이다.

($\Leftrightarrow$ 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.)

▸ (1) 함수 $f(x)$가 증가함수인 경우

$f(-1)<f(1)<f(2)$

이므로

$f(-1)=-a+b=-1$

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$ 즉, $c=-\frac{3}{2}$

$f(2)=4c+5=2$ 즉, $c=-\frac{3}{4}$

연립방정식을 만족시키는 c는 존재하지 않는다.

▸ (2) 함수 $f(x)$가 감소함수인 경우

$f(-1)>f(1)>f(2)$

이므로

$f(-1)=-a+b=2$ …㉡

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$ …㉢

$f(2)=4c+5=-1$ …㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하면

$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

답 20

[풀이2] ★

좌표평면에서 점 $(p,\ q)$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점이라고 하자.

$f(p)=q,\ f^{-1}(p)=q$

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(q)=p,\ f(q)=p$

이므로 점 $(q,\ p)$는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 모두 지난다. 이때, 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

$p=q$인 경우: 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

$p\neq q$인 경우: 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점은 기울기가 -1인 직선 위에 있다.

이제 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

▸ (1) 3개의 교점이 모두 직선 $y=x$ 위에 있는 경우

문제에서 주어진 함수의 방정식에서

$f(-1)=-a+b=-1$

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$ 즉, $c=-\frac{3}{2}$

$f(2)=4c+5=2$ 즉, $c=-\frac{3}{4}$

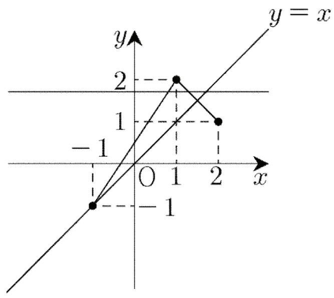
연립방정식의 해가 존재하지 않으므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 3개의 교점이 모두 직선 $y=x$ 위에 있을 수 없다.

▸ (2) 3개의 교점 중에서 하나는 직선 $y=x$ 위에 있고, 나머지 두 개는 기울기가 -1인 직선 위에 있는 경우

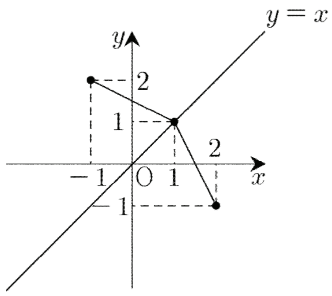
다음의 세 경우로 나누어진다.

• 점 $(-1,\ -1)$이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로, 역함수를 갖지 못한다.

• 점 $(1,\ 1)$이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$는 일대일대응(감소함수)이므로, 역함수를 갖는다.

문제에서 주어진 함수 $f(x)$의 방정식에서

$f(-1)=-a+b=2$ …㉠

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$ 즉, $c=-\frac{3}{2}$ …㉡

$f(2)=4c+5=-1$ 즉, $c=-\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

함수의 연속의 정의에 의하여

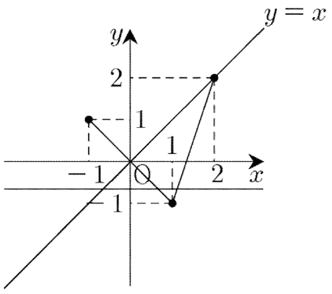
$$\lim_{x \to 1-} f(x) = a+b = c+\frac{5}{2} = f(1)$$

즉, $a+b = c+\dfrac{5}{2}$ $\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = -\dfrac{3}{2}$

• 점 $(2,\ 2)$가 직선 $y=x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로, 역함수를 갖지 못한다.

이상에서

$a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = -\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ 2a+4b-10c = -1+6+15 = 20$

답 20

[풀이3]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

함수의 연속의 정의에 의하여

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = a+b = c+\frac{5}{2} = f(1)$$

즉, $a+b = c+\dfrac{5}{2}$ $\cdots$㉠

연속함수 $f(x)$가 역함수를 가지므로

함수 $f(x)$는 증가함수 또는 감소함수이다.

($\Leftrightarrow$ 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.)

구간 $[1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는

$c=0$이면 $f(x) = \dfrac{5}{2}x$(← 일차함수)

$c \neq 0$이면 $f(x) = c\left(x+\dfrac{5}{4c}\right)^2 - \dfrac{25}{16c}$(← 이차함수)

이때, 이차함수의 대칭축은 $x = -\dfrac{5}{4c}$이다.

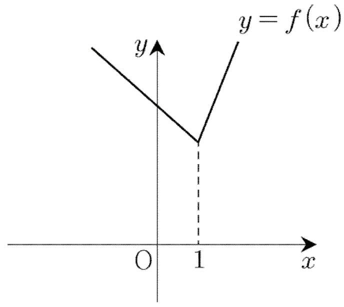
▸ (1) $c=0$인 경우

$c=0$을 ㉠에 대입하면 $b = \dfrac{5}{2} - a$이므로

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)+\dfrac{5}{2} & (x<1) \\ \dfrac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

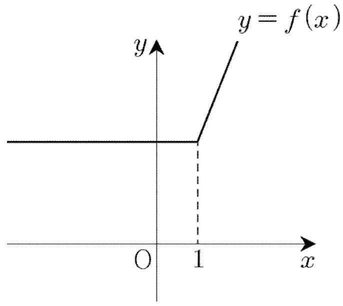
$a<0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로

함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

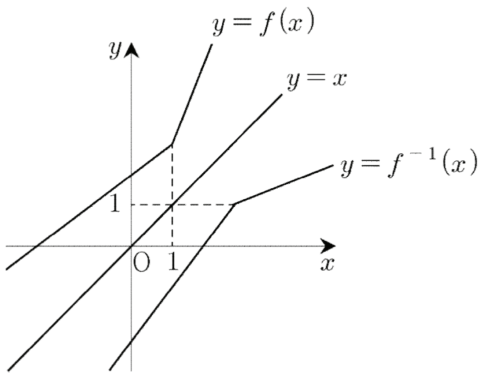
$a=0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로

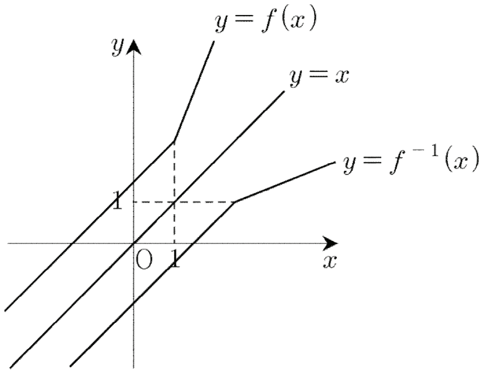
함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

$0<a<1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는

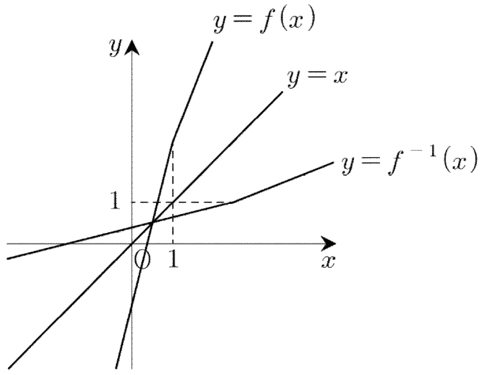


두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

$a=1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



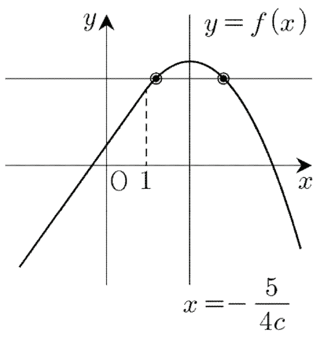
두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
$a>1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수는 $1(\neq 3)$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $c\neq 0$이고, $f(x)$는 이차함수이다. (←귀류법)

▸ (2) $c\neq 0$인 경우

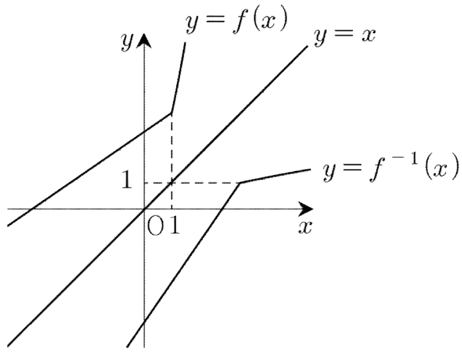
$-\dfrac{5}{4c}>1$ 즉, $-\dfrac{5}{4}<c<0$일 때,
함수 $f(x)$의 그래프는



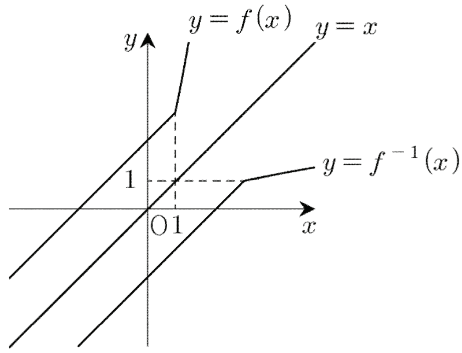
함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로
함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

따라서 $c\leq -\dfrac{5}{4}$ 또는 $c>0$이다.

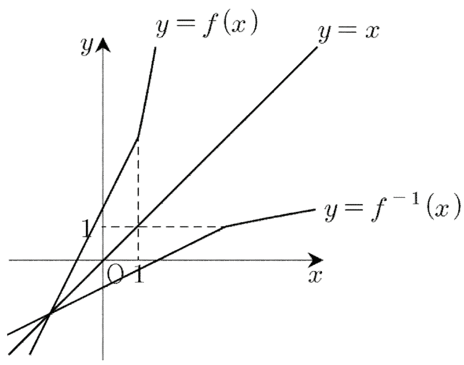
• $c>0$인 경우
함수 $f(x)$는 증가함수여야 하므로 $a>0$이다.
$0<a<1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
$a=1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
$a>1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



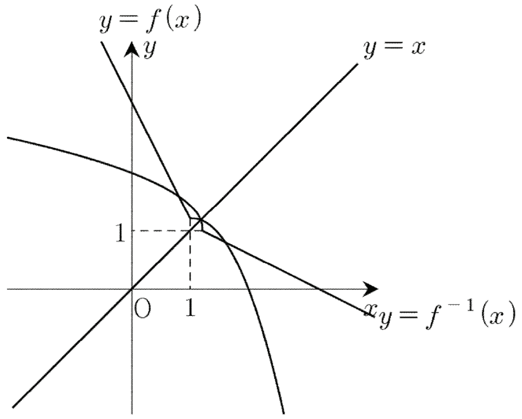
두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수는 $1(\neq 3)$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $c\leq -\dfrac{5}{4}$이다.

• $c\leq -\dfrac{5}{4}$인 경우

함수 $f(x)$는 감소함수여야 하므로 $a<0$이다.

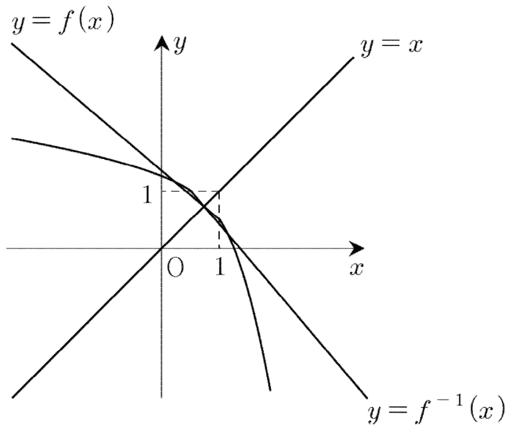
$-\frac{3}{2}<c\le-\frac{5}{4}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



교점 중에서 x좌표가 1인 점은 없다.

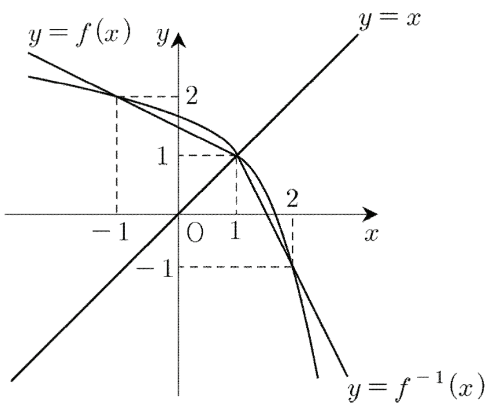
$c<-\frac{3}{2}$일 때,

두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



교점 중에서 x좌표가 1인 점은 없다.

$c=-\frac{3}{2}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



교점 중에서 x좌표가 1인 점이 있다.

$c=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a+b=1$ $\cdots$㉡

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ -\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x & (x\ge1)\end{cases}$$

세 교점의 좌표를 모두 쓰면

$(-1,\ -a+b)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$

이때, 두 점 $(-1,\ -a+b)$, $(2,\ -1)$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$-a+b=2$ $\cdots$㉢

㉡, ㉢을 연립하면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

답 20

18

▶ 실전풀이: [참고5]

[풀이] ★

우선 문제에서 주어진 방정식이 가진 성질에 대하여 알아보자.

p가 문제에서 주어진 방정식의 실근이라고 하면

$f(f(p))=p$

이다. 이때, $f(p)=q$라고 하면

$f(p)=q$, $f(q)=p$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 모두 지난다.

그리고 $f(f(q))=f(p)=q$이므로

$x=q$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.

- $p=q$인 경우

점 $(p,\ q)$는 직선 $y=x$ 위에 있다.

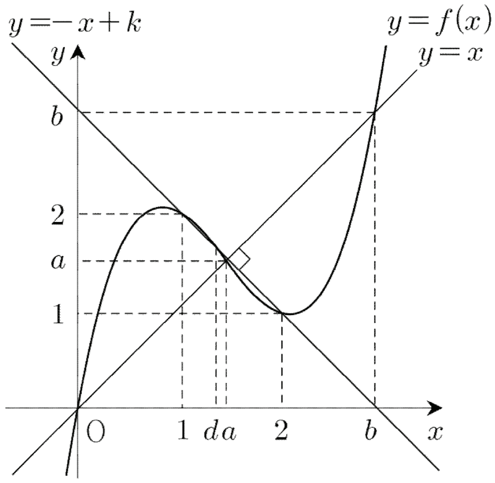
- $p\neq q$인 경우

두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음이 성립한다.

(수직) 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 잇는 직선의 기울기는 $-1\left(=\frac{p-q}{q-p}\right)$이므로 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$는 직선 $y=-x+k$(단, k는 상수) 위에 있다.

(중점) 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 잇는 선분의 중점

$\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p+q}{2}\right)$는 직선 $y=x$ 위에 있다.
문제에서 주어진 조건에 의하여 다음이 성립한다.
$\{0,\ 1,\ a,\ 2,\ b\}$
$=\{f(0),\ f(1),\ f(a),\ f(2),\ f(b)\}$
방정식 $f(f(x))=x$의 해집합에 속하는 서로 다른 두 원소 p, q에 대하여 $f(p)=q$, $f(q)=p$가 되도록 하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 최소 0개, 최대 2개다.
순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 0일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 5이다. 하지만 삼차방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 3이므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 1 또는 2이다.
순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 1일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 3이다.
순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 2일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 1이다. (←[참고4]에서 가능하지 않음을 증명함)
이제 함수 $f(x)$의 그래프의 개형에 대하여 생각하자.
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고, $f'(1)<0$이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
아래 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 세 점에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$가 두 개 이상의 점에서 만난다고 하자. 이때, 교점의 x좌표만을 원소로 하는 집합을 $\{1,\ d,\ 2\}$라고 하자. (←$d=1$ 또는 $d=2$인 경우가 성립하지 않음은 [참고3]에서 증명함. 하지만 풀이과정에서 이 증명이 반드시 필요한 것은 아니다.)
(※ 만약 $d=a$이면 $x=d$는 방정식 $f(f(x))=x$의 해이지만, $d\neq a$이면 $x=d$는 방정식 $f(f(x))=x$의 해가 아니다.)



(※ d의 값은 a의 값 보다 클 수도 있고, a의 값과 같을 수도 있고, a의 값 보다 작을 수도 있다. 위의 그림은 d의 값이 a의 값 보다 작은 경우만을 그린 것이다.)
$f(0)=0$, $f(a)=a$, $f(b)=b$이므로
$f(1)=2$, $f(2)=1$일 수 밖에 없다.
인수정리에 의하여
$f(x)-(-x+k)=c(x-1)(x-d)(x-2)$
(단, c는 양의 상수)
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=c(x-1)(x-d)(x-2)-x+k$
$f(1)=-1+k=2$에서 $k=3$
$f(0)=-2cd+k=0$에서 $d=\frac{3}{2c}$
함수 $f(x)$의 방정식은
$$f(x)=c(x-1)\left(x-\frac{3}{2c}\right)(x-2)-x+3$$
함수 $f(x)$의 도함수는
$$f'(x)=c\left(x-\frac{3}{2c}\right)(x-2)+c(x-1)(x-2)$$
$$+c(x-1)\left(x-\frac{3}{2c}\right)-1$$
문제에서 주어진 조건에 의하여
$$f'(0)-f'(1)=2c+\frac{7}{2}-\left(-c+\frac{1}{2}\right)$$
$3c+3=6$에서 $c=1$
함수 $f(x)$의 방정식은
$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)-x+3$$
방정식 $f(x)=x$를 정리하면

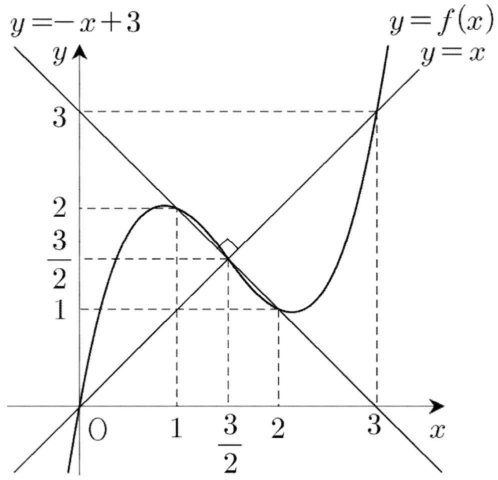
$x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)=0$

풀면

$x=0,\ x=\frac{3}{2}(=a=d),\ x=3(=b)$

이므로 $a,\ b,\ d$의 존재성을 확인할 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는



$\therefore\ f(5)=40$

답 40

[참고1] ★

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때,

'모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 증가한다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 일대일대응이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.'

따라서 아래의 참인 명제를 생각할 수 있다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때,

'어떤 실수 t에 대하여 $f'(t)<0$이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.'

[참고2]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

인수정리에 의하여

$f(x)-x=cx(x-a)(x-b)$

(단, c는 양의 상수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=cx(x-a)(x-b)+x$

$f(1)=2,\ f(2)=1$이므로

$f(1)=c(1-a)(1-b)+1=2,$

$f(2)=2c(2-a)(2-b)+2=1$

정리하면

$1-a-b+ab=\frac{1}{c},$

$4-2a-2b+ab=-\frac{1}{2c}$

위의 두 식을 변변히 빼서 정리하면

$a+b=3+\frac{3}{2c}$ $\cdots$ ㉠

이를 위의 두 식 중 한 식에 대입하여 정리하면

$ab=2+\frac{5}{2c}$ $\cdots$ ㉡

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=c(x-a)(x-b)+cx(x-b)$

$+cx(x-a)+1$

$f'(0)=abc+1,$

$f'(1)=c(1-a)(1-b)+c(2-a-b)+1$

$=c(3-2a-2b+ab)+1$

$=c\left(3-6-\frac{3}{c}+2+\frac{5}{2c}\right)+1=-c+\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f'(0)-f'(1)=abc+c+\frac{1}{2}=6$

정리하면

$c(ab+1)=\frac{11}{2}$

$c\left(3+\frac{5}{2c}\right)=\frac{11}{2}$ ($\because$ ㉡)

정리하면

$3c+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$ 풀면 $c=1$

이를 ㉠, ㉡에 대입하면

$a+b=\frac{9}{2},\ ab=\frac{9}{2}$

두 수 $a,\ b$는 이차방정식 $t^2-\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이 이차방정식을 정리하면

$2t^2-9t+9=0$, $(2t-3)(t-3)=0$
풀면

$t=\frac{3}{2}(=a)$ 또는 $t=3(=b)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)+x$

$\therefore\ f(5)=40$

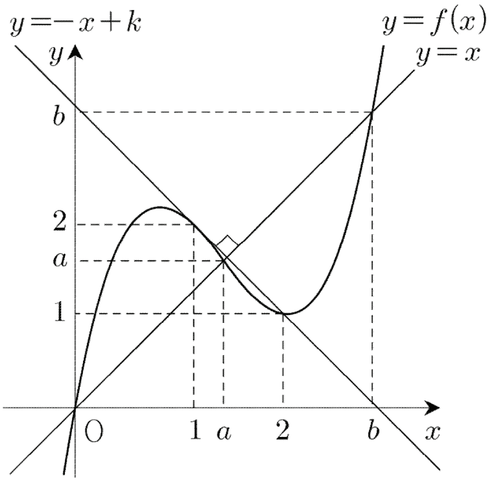
물론 a, b의 값을 각각 구하지 않고, $f(5)$의 값을 구할 수도 있다.

$f(5)=5c(5-a)(5-b)+5$
$=5\{25-5(a+b)+ab\}+5$
$=5\left\{25-5\times\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right\}+5$
$=40$

[참고3]

곡선 $y=f(x)$에 직선 $y=-x+k$가 접하는 경우에 대하여 생각해보자.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 3이고, 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점에서 접한다고 하자. (단, 접점의 x좌표는 a보다 작다.) 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 개수는 2이고, 이 2개의 교점은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이어야 한다.



직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서 접하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 인수정리에 의하여

$f(x)-(-x+k)=c(x-1)^2(x-2)$
(단, c는 양의 상수)

정리하면

$f(x)=c(x-1)^2(x-2)-x+k$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$0=-2c+k$에서 $k=2c$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=c(x-1)^2(x-2)-x+2c$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2c(x-1)(x-2)+c(x-1)^2-1$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f'(0)-f'(1)=5c-1-(-1)=5c=6$

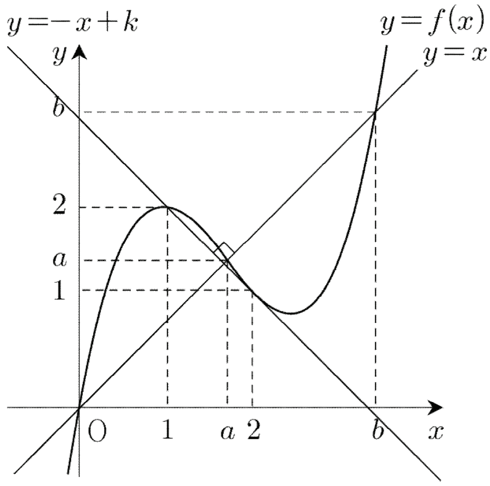
풀면 $c=\frac{6}{5}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{6}{5}(x-1)^2(x-2)-x+\frac{12}{5}$

그런데 $f(1)=\frac{7}{5}\neq 2$이므로 이는 가정에 모순이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 3이고, 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점에서 접한다고 하자. (단, 접점의 x좌표는 a보다 크다.) 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 개수는 2이고, 이 2개의 교점은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이어야 한다.



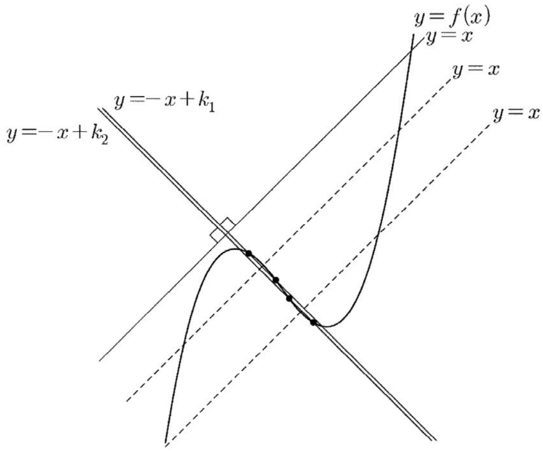
직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서 접하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$을 지나므로 인수정리에 의하여

$f(x)-(-x+k)=c(x-1)(x-2)^2$
(단, c는 양의 상수)

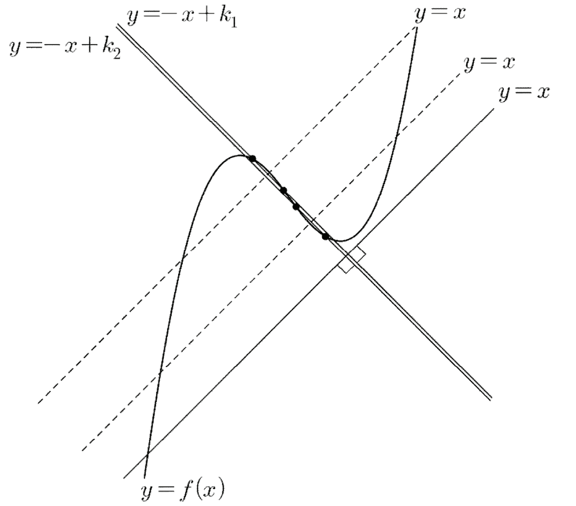
정리하면

$f(x)=c(x-1)(x-2)^2-x+k$
곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로
$0=-4c+k$에서 $k=4c$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=c(x-1)(x-2)^2-x+4c$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=c(x-2)^2+2c(x-1)(x-2)-1$
문제에서 주어진 조건에 의하여
$f'(0)-f'(1)=8c-1-(c-1)=7c=6$
풀면 $c=\dfrac{6}{7}$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=\dfrac{6}{7}(x-1)(x-2)^2-x+\dfrac{24}{7}$
그런데 $f(1)=\dfrac{17}{7}\neq 2$이므로 이는 가정에 모순이다.

[참고4]
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 1인 경우를 살펴보자.

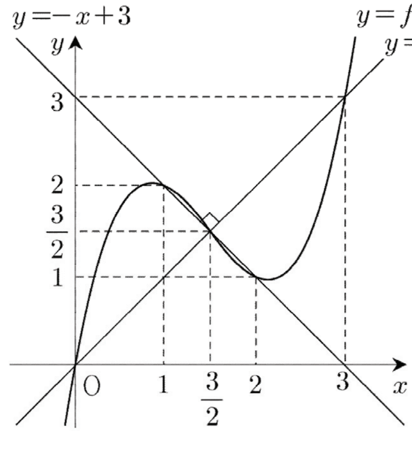


위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_1$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_2$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다.



위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_1$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_2$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다.

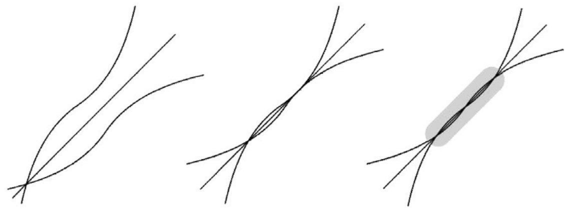
[참고5] 교육과정 외
삼차함수 $f(x)$의 그래프가 변곡점에 대하여 대칭임을 이용하면 빠르게 문제를 해결할 수 있다.
삼차함수 $f(x)$의 그래프는 변곡점에 대하여 대칭이므로 아래 그림처럼 두 직선 $y=x$, $y=-x+k$의 교점을 곡선 $y=f(x)$의 변곡점과 일치시키자. 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 세 교점 중 두 점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 나머지 한 점은 직선 $y=x$ 위에 있게 된다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 세 교점 중 두 점은 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭이고, 나머지 한 점은 직선 $y=-x+k$ 위에 있게 된다.



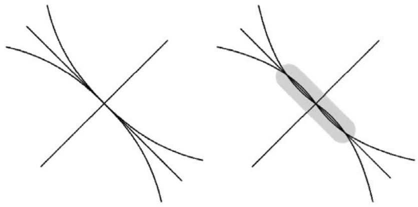
$f(0)=0$, $f(a)=a$, $f(b)=b$이므로
$f(1)=2$, $f(2)=1$일 수 밖에 없다.
점 $(a,\ a)$는 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 잇는 선분의 중점이므로 선분의 내분점의 공식에 의하여
$\dfrac{1+2}{2}=a$에서 $a=\dfrac{3}{2}$
직선 $y=-x+k$는 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$을 지나므로
$\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}+k$에서 $k=3$
점 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$은 두 점 $(0,\ 0)$, $(b,\ b)$를 잇는 선분의 중점이므로 선분의 내분점의 공식에 의하여
$\dfrac{0+b}{2}=\dfrac{3}{2}$에서 $b=3$
인수정리에 의하여
$f(x)-x=cx\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-3)$
(단, c는 양의 상수)
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=cx\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-3)+x$
곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$f(1)=c+1=2$에서 $c=1$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-3)+x$
문제에서 주어진 마지막 조건이 성립하는지를 확인하자.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-3)+x(x-3)$
$+x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+1$
이므로 $f'(0)-f'(1)=6$
문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키므로
$\therefore\ f(5)=40$

[참고6]
실전에서는 곡선 $y=f(x)$와 이 곡선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 곡선의 교점으로 방정식 $f(f(x))=x$의 실근을 구하는 것이 현실적일 수 있다.

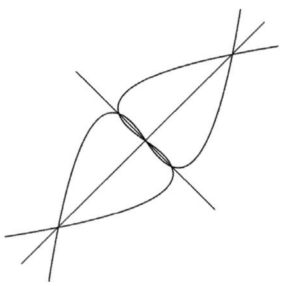
(1) 함수 $f(x)$가 증가하는 경우
두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$와 직선 $y=x$의 위치 관계 중에서 몇 개를 그려보면 다음과 같다.



각 경우에 대하여 방정식 $f(f(x))=x$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 1, 2, 3이다.
(2) 함수 $f(x)$가 감소하는 경우
두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$와 두 직선 $y=x$, $y=-x+k$의 위치 관계 중에서 몇 개를 그려보면 다음과 같다. (단, k는 상수)



각 경우에 대하여 방정식 $f(f(x))=x$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 1, 3이다.
(3) 함수 $f(x)$가 역함수를 갖지 않는 경우
곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형과 일치한다고 하자.
(1)의 세 번째 경우와 (2)의 두 번째 경우에서 문제의 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같음을 알 수 있다.



위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 5이고, 이 중에서 세 점은 직선 $y=x$ 위에 있고 나머지 두 점은 기울기가 -1인 직선 위에 있다. 이때, 이 두 직선의 교점은 두 곡선의 교점과 일치한다.

수능
수학
독본

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

구성

수능 수학독본은 '기본개념 편'과 '실전이론 편'으로 구성됩니다.

▸ 기본개념 편

기본개념 편의 구성은 다음과 같습니다.

교과서 개념 + 문제(예제/문제+연습문제) + 추가적인 설명(✪)

교과서 개념마다 이에 대한 교과서 예제/문제, 연습문제가 따라오며, 교과서 개념과 문제에 대한 이해를 돕는 설명이 추가됩니다. 추가적인 설명은 기호 ✪로 구별하였습니다.

즉, 교과서 전체 + 선생님이 추가하는 설명(✪)으로 구성됩니다.

▸ 실전이론 편

실전이론 편에서는 교과서와 수능/평가원/교사경 기출문제에서 추론 가능한

실전이론, 문제풀이도구, 문제해결전략

을 정리하였습니다.

실전이론 편은 주제별로 구성되어 있으며, 각 주제에 대하여 이론, 도구, 전략(실전에서 문제를 독해하고 해결하는 구체적인 방법)을 제시하였습니다.

실전이론 편의 수록 문항은

- 수능/모평/교사경 기출
- 과거 본고사/논구술 기출 (수능에 맞도록 변형함)

중에서 개념적으로, 문제해결능력 적으로 중요한 문제들입니다.

학습법

▸ 학습순서

• 3점부터 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편 ⇨ 기출 (2, 3점) ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (4점) ⇨ 교과서, 기출 복습

교과서의 기본개념부터 시작하는 경우입니다. 대부분의 4등급 이하의 수험생들이 여기에 해당합니다.

• 쉬운 4점부터 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편 ⇨ 기출 (2, 3점) ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (4점) ⇨ 교과서, 기출 복습

실전이론을 미리 배우고 어려운 기출을 푸는 경우입니다. 3등급 이하의 수험생들에게는 이 방법이 현실적일 것입니다. (교과서 개념을 모두 안다면 기본개념 편 전체를 학습할 필요 없이 본문의 ✪에 해당하는 추가설명만 공부해도 좋습니다.)

• 1등급/만점 결정 문항이 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편(✪) ⇨ 기출 (2, 3점) ⇨ 기출 (4점) 최대한 ⇨ 실전이론 ⇨ 기출(킬러) ⇨ 교과서, 기출 복습

어려운 기출을 최대한 스스로의 힘으로 풀고 나서 실전이론을 나중에 배우는 경우입니다. 대부분의 2등급 수험생들이 여기에 해당합니다. (기본개념 편의 경우 본문의 ✪에 해당하는 추가설명만 공부해도 좋습니다.)

• 1등급/만점 결정 문항도 몇 개를 제외하면 다 풀리는 경우

기본개념 편(✪) ⇨ 기출 (2, 3점) ⇨ 기출 (4점/킬러) 최대한 ⇨ 실전이론 ⇨ 기출(킬러) ⇨ 교과서, 기출 복습

거의 모든 기출을 스스로의 힘으로 풀고 나서 스스로 생각하기 힘든 실전이론을 나중에 배우는 경우입니다. 대부분의 1등급 수험생들이 여기에 해당합니다. (기본개념 편의 경우 본문의 ✪에 해당하는 추가설명만 공부해도 좋습니다.)
실전이론을 학습하기 전에 기출문제를 스스로의 힘으로 풀어서 문제해결능력을 키워두는 편이 낫습니다. 스스로의 힘으로 풀 수 있는 기출문제의 수가 많은 상태에서 실전이론을 학습한다면 좀 더 많은 것을 얻어갈 수 있을 것입니다.

▶ 이동훈 기출문제집과의 병행

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ (교과서 예제 또는 그 수준의 문제)
○○ (교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제)
○○○ (교과서 예제 또는 연습문제 이상의 수준의 문제) – 상대적으로 난이도 낮음 3~4등급 이하
●●● (교과서 예제 또는 연습문제 이상의 수준의 문제) – 상대적으로 난이도 높음 (준킬러 포함) 2~3등급
★★★ (교과서 예제 또는 연습문제 이상의 수준의 문제) – 최고난문 1등급/만점

○, ○○는 교과서 예제/문제, 중대단원 연습문제와 유형 및 난이도가 같습니다.
○○○은 쉬운 4점, ●●●은 어려운 4점, ★★★은 1등급/만점 결정 난문입니다.

• 3점부터 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편 ⇨ 기출 (○, ○○) ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (○○○, ●●●) ⇨ 기출 (★★★) ⇨ 교과서, 기출 복습

• 쉬운 4점부터 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편 ⇨ 기출 (○, ○○) ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (○○○, ●●●) ⇨ 기출 (★★★) ⇨ 교과서, 기출 복습

• 1등급/만점 결정 문항이 잘 풀리지 않는 경우

기본개념 편(✪) ⇨ 기출 (○, ○○, ○○○) ⇨ 기출 (●●●) 최대한 ⇨ 실전이론 ⇨ 기출(●●●, ★★★) ⇨ 교과서, 기출 복습

• 1등급/만점 결정 문항도 몇 개를 제외하면 다 풀리는 경우

기본개념 편(✪) ⇨ 기출 (○, ○○, ○○○) ⇨ 기출 (●●●) ⇨ 기출(★★★) 최대한 ⇨ 실전이론 ⇨ 기출 (★★★) ⇨ 교과서, 기출 복습

목차

삼각함수

1. 삼각함수

2. 삼각함수의 미분

1 일반각과 호도법

학습목표

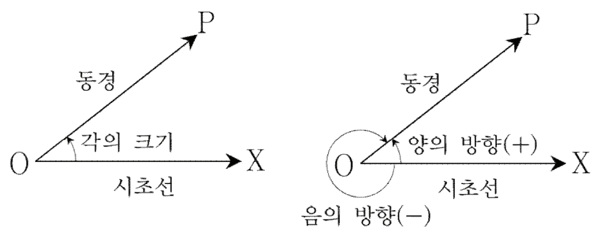
- 일반각과 호도법의 뜻을 안다.

✪ 다른 단원도 마찬가지이지만, 삼각함수 단원은 교과서 본문의 기본 개념에 대한 명확한 이해가 상당히 중요하다. 이 단원은 교과서 본문이 충분히 이해될 때까지 여러 번 반복하길 바란다.

▶ 일반각

지금까지는 0°에서 360°까지의 각만을 사용하여 각의 크기를 나타내었다.

이제 각의 크기의 범위를 확장해 보자.

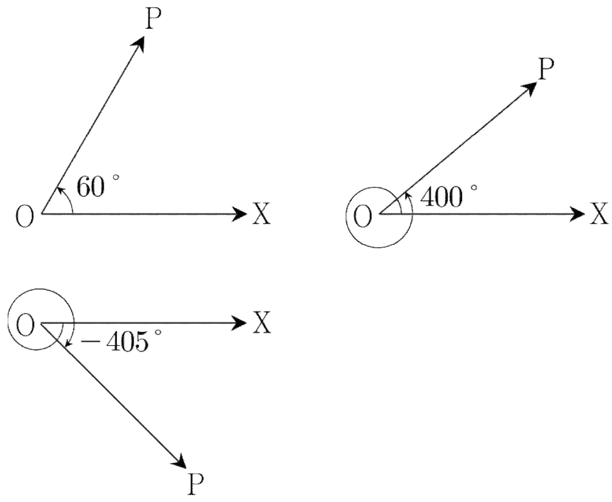


위의 그림과 같이 평면 위의 두 반직선 OX와 OP는 ∠XOP를 결정한다. 여기서 ∠XOP의 크기는 반직선 OP가 점 O를 중심으로 고정된 반직선 OX의 위치에서 시작하여 OP의 위치까지 회전한 양으로 정의한다. 이때 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다. (시초선은 시작하는 선이라는 뜻이고, 동경은 움직이는 선이라는 뜻이다.)

또한 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시계 반대 방향을 양의 방향, 시계 방향을 음의 방향이라고 정한다. 그리고 각은 회전하는 방향에 따라 양의 방향이면 +부호를, 음의 방향이면 −부호를 붙여 나타낸다. 이때 양의 부호 +는 보통 생략한다.

따라서 ∠XOP의 동경 OP는 점 O를 중심으로 음의 방향으로 회전하면 각의 크기를 음수의 범위로 확장할 수 있다. 또 한 바퀴 이상 회전할 수 있으므로 360°보다 큰 각 또는 -360°보다 작은 각을 생각할 수 있다.

이를테면 60°, 400°, -405°의 각을 나타내는 시초선 OX와 동경 OP를 그리면 다음 그림과 같다.

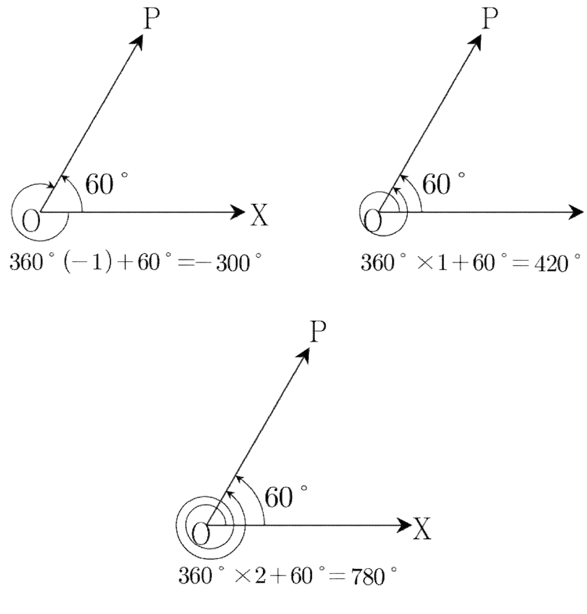


시초선 OX는 고정되어 있으므로 ∠XOP의 크기가 정해지면 동경 OP의 위치는 하나로 정해진다.

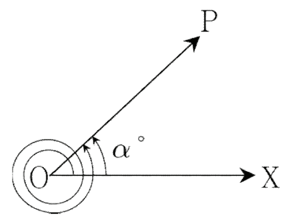
그러나 동경 OP가 양의 방향 또는 음의 방향으로 한 바퀴 이상 회전할 수 있으므로 동경 OP의 위치가 정해져도 ∠XOP의 크기는 하나로 정해지지 않는다.

시초선 OX와 동경 OP가 주어질 때, ∠XOP의 크기는 동경 OP가 양의 방향 또는 음의 방향으로 몇 번 회전하였느냐에 따라 다르므로 하나로 정해지지 않는다.

예를 들면 시초선 OX와 60°의 위치에 있는 동경 OP가 나타내는 각의 크기는 다음 그림과 같이 여러 가지로 나타낼 수 있다.



일반각으로 나타낼 때, α°는 주어진 동경이 나타내는 어떤 각이라도 좋지만,
보통 $0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$ 또는 $-180^\circ < \alpha^\circ \leq 180^\circ$인 것을 택한다.

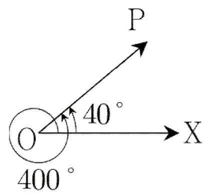


일반적으로 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α°라고 하면 $\angle$XOP의 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n은 정수)

이것을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

보기



시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기가 400°일 때, $400^\circ = 360^\circ \times 1 + 40^\circ$이므로 동경 OP가 나타내는 일반각은

$360^\circ \times n + 40^\circ$ (단, n은 정수)

문제 1

p.22

다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 구하여라.

(1) 390° (2) -780°

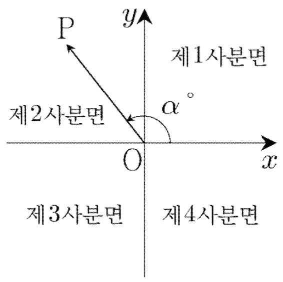
문제 2

p.22

반직선 OX를 시초선으로 하여 각의 크기가 다음과 같을 때, 동경의 위치가 같은 것끼리 짝지어라.

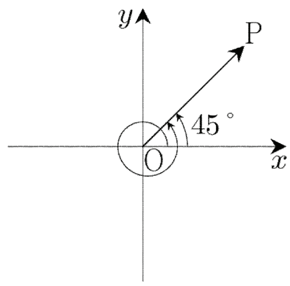
(1) 30° (2) 740° (3) 1100° (4) -330°

아래 그림과 같이 좌표평면의 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 시초선을 잡을 때, 동경 OP가 좌표평면의 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다. 동경 OP가 좌표축 위에 있을 때는 어느 사분면에도 속하지 않는다.

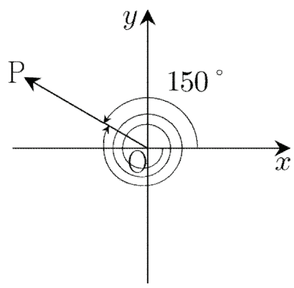


보기

(1) $405^\circ = 360^\circ \times 1 + 45^\circ$ 이므로 400°는 제1사분면의 각이다.



(2) $-930^\circ = 360^\circ \times (-3) + 150^\circ$ 이므로 -930°는 제2사분면의 각이다.



문제 3

p.22

다음 각은 제 몇 사분면의 각인지 말하여라.

(1) 420°　　(2) 700°　　(3) -210°　　(4) -1180°

〈연습4〉

✪ 이 문제는 수능에서 거의 다루어지지 않는 유형이다. 이 문제가 잘 풀리지 않으면 해설집을 참고해도 좋다.

연습 4

p.22

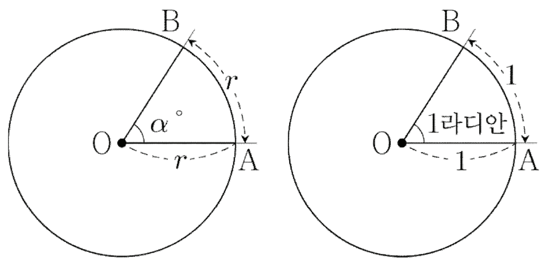
$0 < \theta < \pi$이고 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일치할 때, 각 θ의 크기를 모두 구하여라.

▶ 호도법

호도법이란 무엇인가?

지금까지는 각의 크기를 나타낼 때, 45°, 90°, -120°와 같이 도($^\circ$)를 단위로 하는 육십분법을 사용하였다. (육십분법에서 1°는 원의 둘레를 360등분하였을 때, 각 호에 대한 중심각의 크기이다.)

이제 각의 크기를 나타내는 새로운 단위에 대하여 알아보자.



위의 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각 $\angle \mathrm{AOB}$의 크기는 반지름의 길이 r에 관계없이 일정하다. 이때 부채꼴의 중심각 $\angle \mathrm{AOB}$의 크기를 α°라고 하면, 한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

$$2\pi r : r = 360^\circ : \alpha^\circ,\ \text{즉 } \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$$

이다.

따라서 호의 길이와 반지름의 길이가 같을 때, 중심각의 크기는 반지름의 길이에 관계없이 항상 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$로 일정함을 알 수 있다.

이 일정한 각의 크기 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

따라서 육십분법과 호도법 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

1라디안은 육십분법으로 약 57°이다. (이는 60°보다 살짝 작은 값이다.)

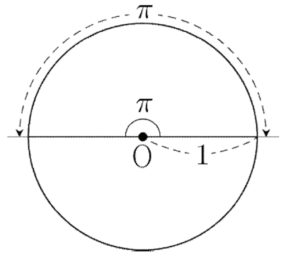
기본개념

〈육십분법과 호도법〉

1라디안$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, $\quad 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$라디안

✪ 위의 두 등식보다는 'π라디안$=180^\circ$' 임을 기억하는 편이 낫다.

단위원에서 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다. (단위원의 둘레가 2π임을 떠올리면 아래의 그림이 바로 이해될 것이다.)



참고

호도법을 사용할 때는 보통 각의 단위인 라디안을 생략한다. 그리고 각의 크기를 1, π, $\frac{4}{3}\pi$와 같이 실수처럼 쓴다.

보기

(1) $45^\circ=45\times1^\circ=45\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$

(2) $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times1$(라디안)$=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=120^\circ$

✪ 위와 같이 등식이 성립함을 보여도 좋지만,

(1) π라디안$=180^\circ$의 양변을 4로 나누면 $\frac{\pi}{4}=45^\circ$

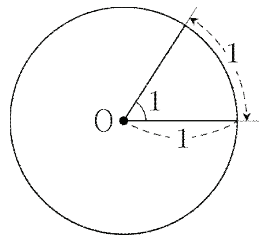
(2) π라디안$=180^\circ$의 양변에 $\frac{2}{3}$을 곱하면 $\frac{2}{3}\pi=120^\circ$

위와 같이 π라디안$=180^\circ$에서 식 변형을 하는 편이 낫다.

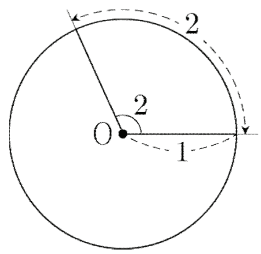
✪ 호도법(라디안)을 라디안(호도법)으로 바꾸는 법 (특수각의 경우)

이제 특수각을 라디안으로 나타내어 보자.

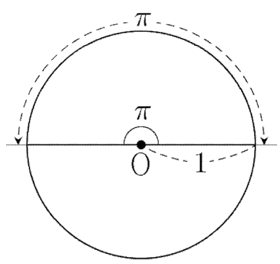
단위원에서 호의 길이가 1인 부채꼴의 중심각의 크기는 1(라디안)이다.



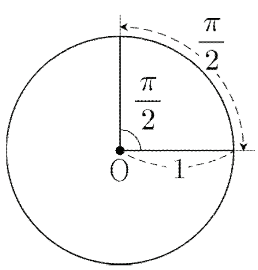
단위원에서 호의 길이가 2인 부채꼴의 중심각의 크기는 호의 길이가 1인 부채꼴의 중심각의 크기의 2배이므로 2이다.

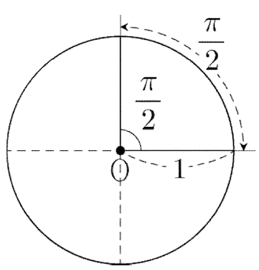


단위원에서 호의 길이가 π인 부채꼴의 중심각의 크기는 호의 길이가 1인 부채꼴의 중심각의 크기의 π배이므로 π이다. 이때, $\pi=180^\circ$ 임을 상기하자.

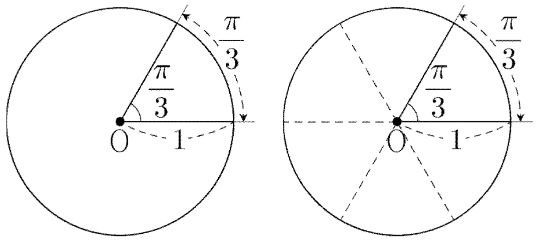


$\pi=180^\circ$ 의 양변을 2로 나누면 $\dfrac{\pi}{2}=90^\circ$ 이다.

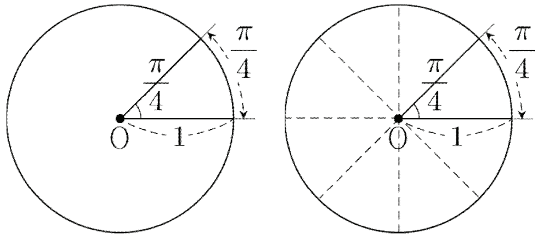




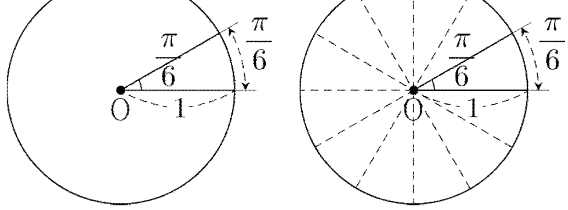
$\pi=180^\circ$ 의 양변을 3으로 나누면 $\dfrac{\pi}{3}=60^\circ$ 이다.



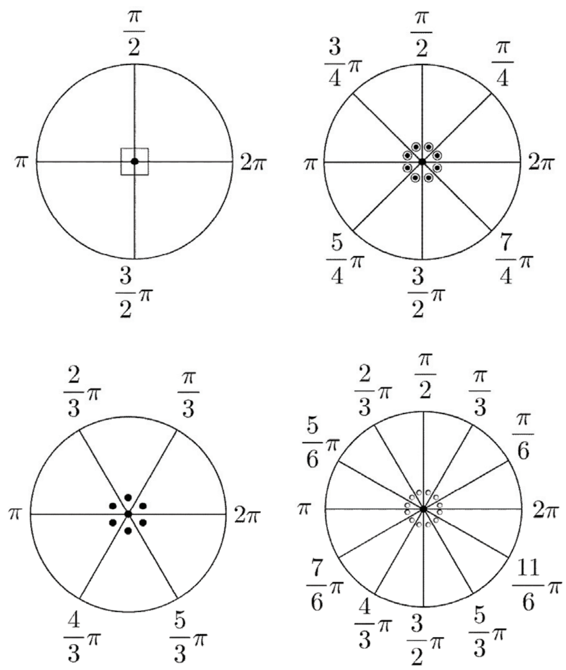
$\pi = 180^\circ$ 의 양변을 4로 나누면 $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ 이다.



$\pi = 180^\circ$ 의 양변을 6으로 나누면 $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ 이다.



단위원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 다음을 얻는다. (단, ◉$=45^\circ$, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)



〈문제5〉
✪ 이와 같이 특수각을 단위원에 나타낼 수 있어야 한다. 머릿속에 바로 떠오를 때까지 흰 종이에 충분히 연습하자!

문제 5

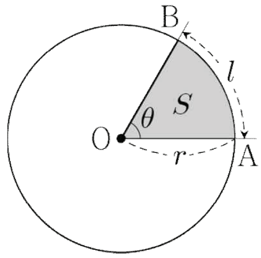
p.22

다음 표의 빈칸에 육십분법 또는 호도법으로 알맞은 각을 써넣어라.

육십분법의 각	30°		60°			135°		180°
호도법의 각		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$		$\frac{5}{6}\pi$	

육십분법의 각		225°		270°	300°		330°	
호도법의 각	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$			$\frac{7}{4}\pi$		2π

호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하여 보자.



반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l이라 하고, 부채꼴 OAB의 넓이를 S라고 하자.

호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

$$2\pi r : l = 2\pi : \theta \qquad \text{즉, } l = r\theta$$

이다.

또 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 비례하므로

$$\pi r^2 : S = 2\pi : \theta \qquad \text{즉, } S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

이다.

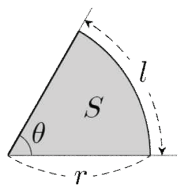
이상을 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈부채꼴의 호의 길이와 넓이〉

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$



예제 1

반지름의 길이가 6cm이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하여라.

풀이

부채꼴의 호의 길이 l은

$$l=6\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi(\text{cm})$$

부채꼴의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{2}{3}\pi=12\pi(\text{cm}^2)$$

답 호의 길이: 4πcm, 넓이: $12\pi\text{cm}^2$

문제 6

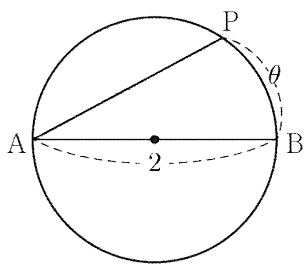
p.23

호의 길이가 4πcm이고 넓이가 $24\pi\text{cm}^2$인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 구하여라.

연습 7

p.23

다음 그림에서 원 O의 지름 AB의 길이는 2이고 호 BP의 길이는 θ이다. 현 AP의 길이를 θ로 표현하여라.



2 삼각함수

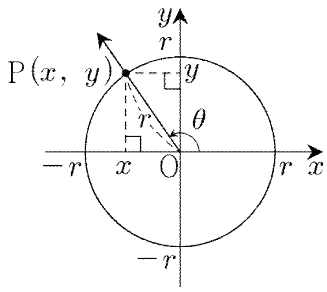
학습목표

- 삼각함수의 뜻을 안다.

▶ 삼각함수

삼각함수란 무엇인가?

지금까지는 삼각비를 0° 에서 90° 까지의 범위에서만 다루었다.
이제 삼각비의 개념을 일반각의 경우로 확장해 보자.



위의 그림과 같이 좌표평면의 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 시초선을 잡을 때, 일반각 θ를 나타내는 동경을 OP라고 하자. 이때, 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원과 동경 OP의 교점을 $P(x,\ y)$라고 하면

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

의 값은 반지름 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나씩 정해진다.

따라서

$$\theta \rightarrow \frac{y}{r},\ \theta \rightarrow \frac{x}{r},\ \theta \rightarrow \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

와 같은 대응은 각각 θ에 대한 함수이다.

이 함수를 각각 θ에 대한 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 기호로

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

와 같이 나타낸다.

한편 θ에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 역수의 값을 대응시킨 관계

$$\theta \to \frac{r}{y}\ (y \neq 0),\ \theta \to \frac{r}{x}\ (x \neq 0),\ \theta \to \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

도 각각 θ에 대한 함수가 된다.

이 함수를 각각 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라 하고, 기호로

$$\csc\theta = \frac{r}{y}\ (y \neq 0),\ \sec\theta = \frac{r}{x}\ (x \neq 0),\ \cot\theta = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

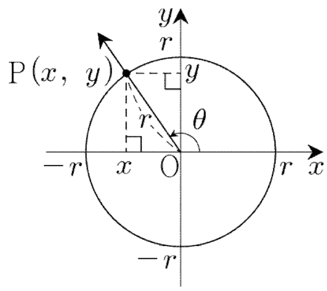
와 같이 나타낸다.

csc, sec, cot는 각각 cosecant, secant, cotangent의 약자이다.

위에서 정의한 함수를 통틀어 일반각 θ에 대한 삼각함수라고 한다.

기본개념

〈삼각함수의 정의〉



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\qquad \csc\theta = \dfrac{r}{y}\ (y \neq 0)$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\qquad \sec\theta = \dfrac{r}{x}\ (x \neq 0)$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}\ (x \neq 0)$, $\qquad \cot\theta = \dfrac{x}{y}\ (y \neq 0)$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이면 θ에 대한 삼각함수는 삼각비와 일치한다. 따라서 점 P가 제1사분면 위에 있을 때의 삼각함수의 정의(삼각비)가 다른 사분면에서도 유지된다고 생각해도 좋다.

✪ 다음과 같이 기억하자.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y\text{좌표}}{\text{반지름}},\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x\text{좌표}}{\text{반지름}},$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y\text{좌표}}{x\text{좌표}}\ (x \neq 0)$$

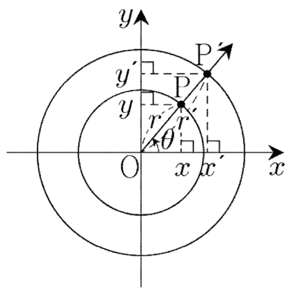
즉, r은 선분의 길이이지만, x, y는 선분의 길이가 아닌 점의 좌표이다. 이 점에 유의해야 한다.

삼각함수의 정의에서 다음을 알 수 있다.

❶ $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

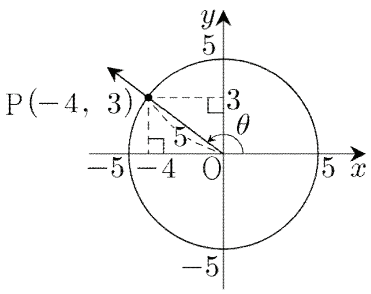
❷ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

참고



각이 일정할 때, 삼각비가 빗변의 길이에 관계없이 일정한 것처럼
각이 일정할 때, 삼각함수의 값도 반지름 r의 값에 관계없이 일정하다.

보기



각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원의 교점이
P$(-4,\ 3)$일 때, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로

$$\sin\theta=\frac{3}{5},\quad \cos\theta=-\frac{4}{5},\quad \tan\theta=-\frac{3}{4}$$

$$\csc\theta=\frac{5}{3},\quad \sec\theta=-\frac{5}{4},\quad \cot\theta=-\frac{4}{3}$$

문제 8

p.24

원점 O와 점 P(5, −12)를 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값을 구하여라.

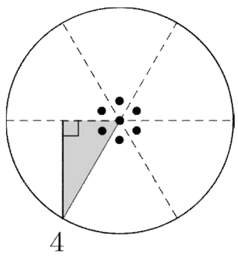
예제 2

$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$일 때, 삼각함수의 값을 구하여라.

풀이

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 단위원이라고 한다.

✪ 우선 단위원에서 특수각 $\dfrac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경을 찾으면 다음과 같다.



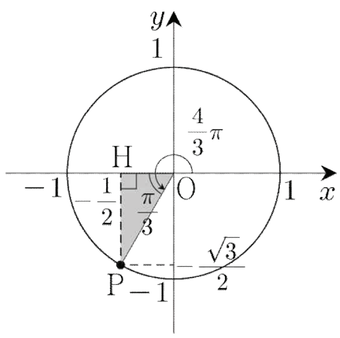
(단, ●＝60°)

위의 그림에서 어둡게 색칠된 직각삼각형의 세 내각의 크기는 각각 30°, 60°, 90°이다.

이제 이 직각삼각형의 세 변의 길이는 각각 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 1이다. 이를 이용하여 동경의 좌표가 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$임을 알 수 있다.

삼각함수의 값은 원의 반지름의 길이 r에 관계없이 일정하므로 $r=1$로 생각하면 편리하다.

교과서 본문의 풀이는 다음과 같다.



위의 그림과 같이 각 $\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

삼각형 POH에서 $\overline{\mathrm{OP}}=1$이고, $\angle\mathrm{POH}=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{HP}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (←특수각의 삼각비의 정의)

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$,

$\csc\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\theta=-2$, $\cot\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $\cos\theta$, $\sin\theta$는 각각 단위원 위의 점 P의 x좌표, y좌표이고, $\tan\theta$는 직선 OP의 기울기이다.

답 풀이 참조

문제 9

p.24

다음 각 θ에 대하여 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\frac{7}{4}\pi$　　　　(2) $-\frac{2}{3}\pi$

▸ 삼각함수의 값의 부호

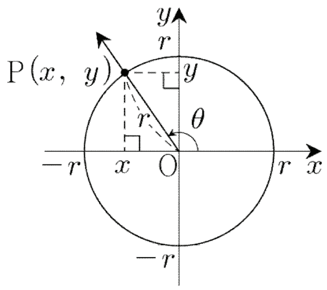
삼각함수의 값의 부호를 조사해보자.

각 θ를 나타내는 동경 OP 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 x좌표와 y좌표의 부호는 동경이 위치한 사분면에 따라 결정된다.

아래 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경 OP에 대하여 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$, $\overline{\mathrm{OP}}=r(r>0)$라고 하면

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

이다.

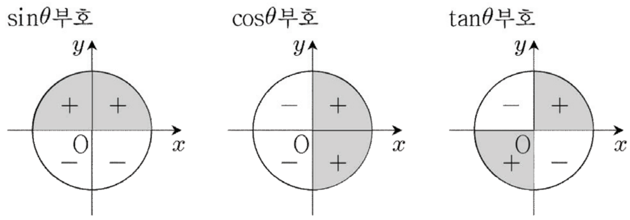


따라서 삼각함수의 값의 부호는 θ의 동경이 위치 한 사분면에 따라 다음과 같이 정해진다.

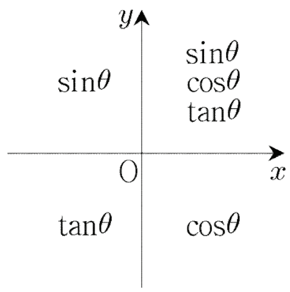
사분면 \ 삼각함수	제1사분면 $(x>0,\ y>0)$	제2사분면 $(x<0,\ y>0)$	제3사분면 $(x<0,\ y<0)$	제4사분면 $(x>0,\ y<0)$
$\sin\theta=\frac{y}{r}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	$+$	$-$	$+$	$-$

$\sin\theta$의 부호는 점 P의 y좌표의 부호와 같으므로 $\sin\theta$가 양$(+)$인 사분면은 제1사분면, 제2사분면뿐이다.
$\cos\theta$의 부호는 점 P의 x좌표의 부호와 같으므로 $\cos\theta$가 양$(+)$인 사분면은 제1사분면, 제4사분면뿐이다.
$\tan\theta$의 부호는 직선 OP의 기울기와 같으므로 $\tan\theta$가 양$(+)$인 사분면은 제1사분면, 제3사분면뿐이다.

각 사분면에서 삼각함수의 값의 부호는 다음과 같이 정해진다.



각 사분면에서 그 값이 양수인 삼각함수를 적으면 다음 그림과 같다.



참고

$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

이므로 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값의 부호는 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호와 같다.

문제 10

p.24

각 θ의 크기가 다음과 같을 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호를 말하여라.

(1) 120°　　(2) 400°　　(3) $\dfrac{5}{3}\pi$　　(4) $-\dfrac{3}{5}\pi$

문제 11

p.24

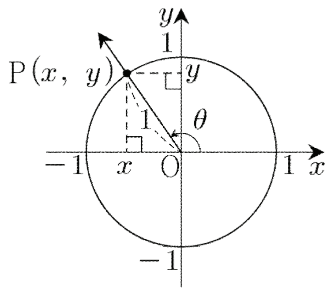
다음 조건을 만족시키는 θ는 어느 사분면의 각인지 말하여라.

(1) $\sin\theta\cos\theta < 0$　　(2) $\sec\theta\tan\theta > 0$

▶ 삼각함수 사이의 관계

삼각함수 사이에는 어떤 관계가 있는가?

삼각함수 사이의 관계를 알아보자.



✪ 단위원 위의 점 P의 x좌표, y좌표는 각각 $\cos\theta$, $\sin\theta$이고, 직선 OP의 기울기는 $\tan\theta$이다.

일반적으로 위의 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\theta = y,\ \cos\theta = x,\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ \ (x \neq 0)$$

이므로

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

이다.

한편 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 단위원 위의 점이므로

$$x^2 + y^2 = 1$$

이 성립한다.

$(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, $(\tan\theta)^2$은 각각 $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\tan^2\theta$로 나타낸다.

그런데 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$이므로

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad \cdots ㉠$$

이다.

이때 ㉠의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

이다.

따라서

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

가 성립한다.

또 ㉠의 양변을 $\sin^2\theta$로 나누면

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

이다.

따라서

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

✪ 이 공식은 유도할 수 있어야 하고 반드시 암기해야 한다.

기본개념

〈삼각함수 사이의 관계〉

❶ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

❷ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

❸ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

❹ $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

예제 3

θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$일 때, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

풀이

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에서

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

그런데 θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta < 0$

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$

또 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$

답 $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$

문제 12 p.24

θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta = \dfrac{5}{12}$일 때, $\sec\theta$, $\csc\theta$의 값을 구하여라.

예제 4

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구하여라.

풀이

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

답 $-\frac{3}{8}$

문제 13 p.25

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin^2\theta-\cos^2\theta$

예제 5

$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$를 간단히 하여라.

풀이

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

답 $2\csc\theta$

〈문제14〉
✪ 삼각함수 csc, sec, cot가 포함된 식을 변형할 때, 이를 sin, cos 만을 포함한 식으로 변형하면 계산이 편하다.

문제 14

p.25

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$ (2) $\dfrac{1}{\csc\theta-\cot\theta}+\dfrac{1}{\csc\theta+\cot\theta}$

문제 15

p.25

θ가 제3사분면의 각이고 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\tan\theta+\cot\theta$ (2) $\csc\theta+\sec\theta$

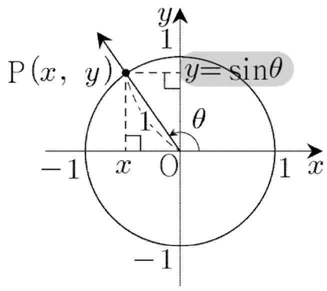
3 삼각함수의 그래프

학습목표

- 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

▸ 사인함수의 그래프

사인함수의 그래프를 그려보자.



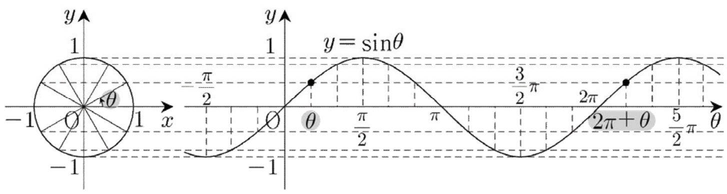
위의 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

이다.

따라서 θ의 값이 변할 때, $\sin\theta$의 값은 점 P의 y좌표로 정해진다.

단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\sin\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\sin\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다. 이때, θ의 값은 가로축에, $\sin\theta$의 값은 세로축에 나타낸다.



위의 그래프에서 함수 $y=\sin\theta$는 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이

$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이며, 모든 실수 θ에서 연속임을 알 수 있다.

일반적으로 함수의 정의역의 원소는 x로 나타내므로 사인함수는 $y=\sin\theta$에서 θ를 x로 바꾸어 $y=\sin x$로 나타내자.

한편 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 따라서 임의의 실수 x에 대하여

$$\sin(-x)=-\sin x$$

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x \quad (n\text{은 정수})$$

가 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족하는 상수 $p(p\neq0)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, 이 상수 p 중에서 가장 작은 양수를 주기함수 $f(x)$의 주기라고 한다.

따라서 $y=\sin x$는 주기가 2π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈함수 $y=\sin x$의 그래프와 성질〉

❶ 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1\leq y\leq 1\}$이다.

❷ 모든 실수에서 연속이다.

❸ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉,

$\sin(-x)=-\sin x$

❹ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉,

$\sin(2n\pi+x)=\sin x$ (단, n은 정수)

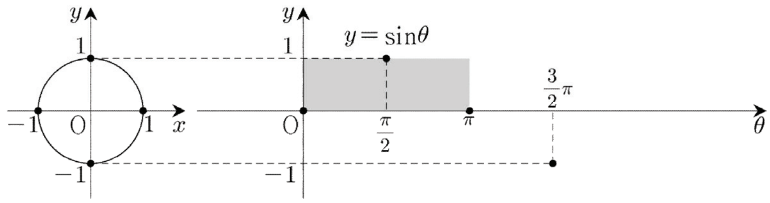
✪ 사인함수의 그래프를 그리는 법

사인함수 $y=\sin\theta$의 그래프를 그려보자.

① 곡선 $y=\sin\theta$가 지나는 점을 몇 개 찍자.

θ	점 P의 y좌표	곡선이 지나는 점
0	0	$(0,\ 0)$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$
π	0	$(\pi,\ 0)$
$\frac{3}{2}\pi$	-1	$\left(\frac{3}{2}\pi,\ -1\right)$

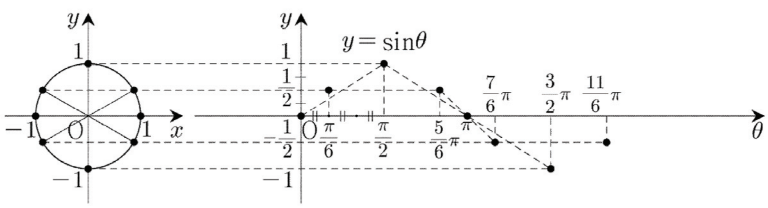
이 네 개의 점을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



$\pi\approx3.14$이므로 위의 그림에서 어둡게 색칠된 직사각형은 이웃한 두 변의 길이의 비가 대략 $3:1$이 되도록 그려야 한다. 그래야 비교적 정확하게 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

② 곡선 $y=\sin\theta$가 지나는 점을 몇 개 더 찍자.

θ	점 P의 y좌표	곡선이 지나는 점
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}\right)$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\right)$
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{7}{6}\pi,\ -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{11}{6}\pi,\ -\frac{1}{2}\right)$



두 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\right)$은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.

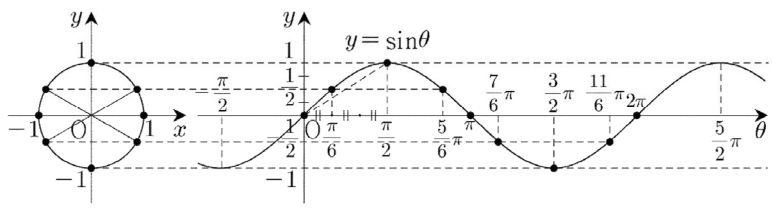
여기서 곡선 $y=\sin\theta$가 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

두 점 $\left(\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{7}{6}\pi,\ -\dfrac{1}{2}\right)$은 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이다. 여기서 곡선 $y=\sin\theta$가 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

그리고 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$을 잇는 선분의 위쪽 방향에 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$이 있으므로 곡선 $y=\sin\theta$는 위로 볼록임을 알 수 있다.

사인함수 $y=\sin\theta$의 주기는 2π이므로 이 곡선은 직선 $x=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$에 대하여 대칭이고, 점 $(n\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이다. (단, n은 정수이다.)

③ 곡선 $y=\sin\theta$가 지나는 점들을 부드럽게 연결하면 구간 $[0,\ 2\pi)$에서의 그래프의 개형을 얻는다.



사인함수 $y=\sin\theta$의 주기는 2π이므로 나머지 구간에서도 그래프의 개형을 그리면 위의 그림과 같다.

✪ 사인함수의 그래프와 특수각

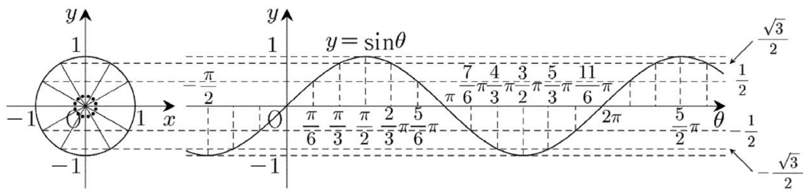
아래의 표를 다시 떠올리자.

육십분법의 각	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
호도법의 각	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

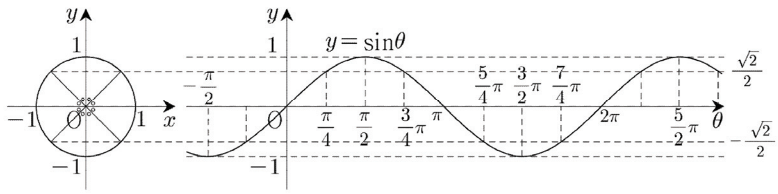
육십분법의 각	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
호도법의 각	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

위의 표의 각 각에 대한 사인함수의 값은 다음과 같다.

(단, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$)



(단, ●$=30°$)



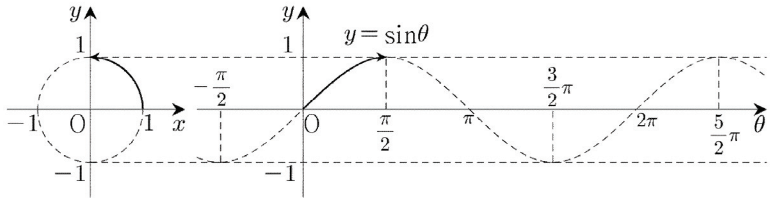
(단, ○$=45°$)

위의 그림을 흰 종이에 몇 번 따라 그리고 절대 잊지 말도록 하자.

✪ 사인함수의 대칭성 (선대칭, 점대칭) (1)

θ의 값에 따른 $\sin\theta$의 값의 변화를 관찰하자.

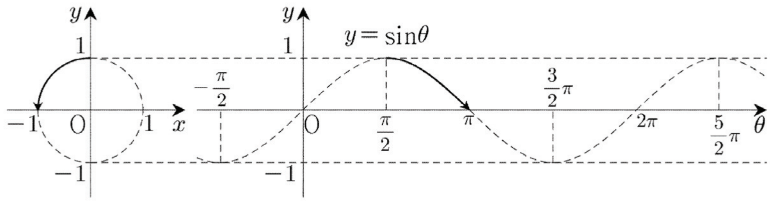
①



위의 그림처럼 θ가 0에서 $\dfrac{\pi}{2}$까지 변할 때, 점 P의 y좌표,

즉 $\sin\theta$는 0에서 1까지 증가한다.

②

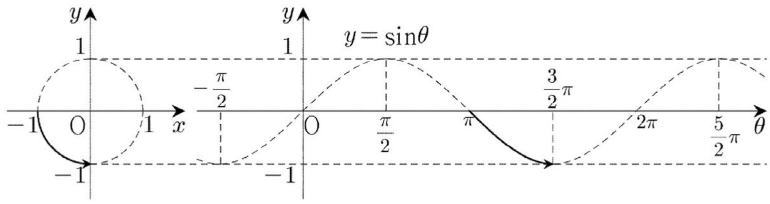


위의 그림처럼 θ가 $\dfrac{\pi}{2}$에서 π까지 변할 때, 점 P의 y좌표,

즉 $\sin\theta$는 1에서 0까지 감소한다.

①, ②에 의하여 곡선 $y=\sin\theta$는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.

③

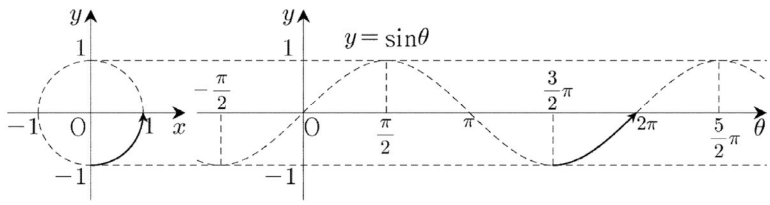


위의 그림처럼 θ가 π에서 $\dfrac{3}{2}\pi$까지 변할 때, 점 P의 y좌표,

즉 $\sin\theta$는 0에서 -1까지 감소한다.

②, ③에 의하여 곡선 $y=\sin\theta$는 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

④

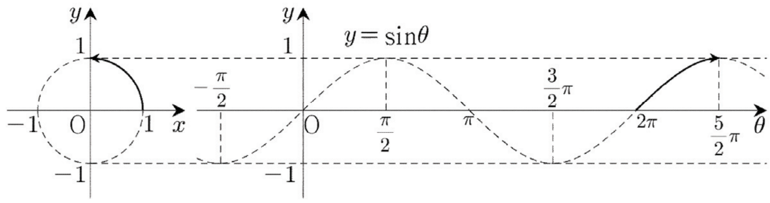


위의 그림처럼 θ가 $\frac{3}{2}\pi$에서 2π까지 변할 때, 점 P의 y좌표,

즉 $\sin\theta$는 -1에서 0까지 증가한다.

③, ④에 의하여 곡선 $y=\sin\theta$는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이다.

⑤



위의 그림처럼 θ가 2π에서 $\frac{5}{2}\pi$까지 변할 때, 점 P의 y좌표,

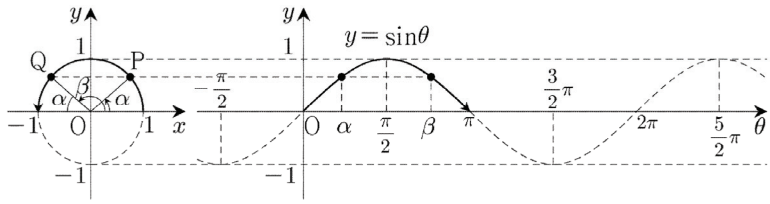
즉 $\sin\theta$는 0에서 1까지 증가한다.

①, ⑤에 의하여 곡선 $y=\sin\theta$의 주기는 2π이다.

✪ 사인함수의 대칭성 (선대칭, 점대칭) (2)

사인함수 $y=\sin\theta$의 선대칭과 점대칭에 대한 성질을 좀 더 살펴보자.

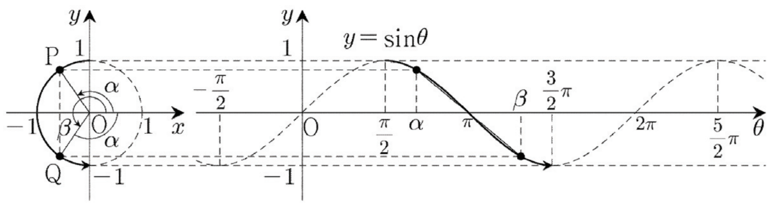
① 선대칭



위의 그림처럼 두 점 P, Q의 y좌표가 같을 때 즉, $\sin\alpha=\sin\beta$일 때, 단위원에서 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$임을 알 수 있다.

두 점 $(\alpha,\ \sin\alpha)$, $(\beta,\ \sin\beta)$는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로, 사인함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.

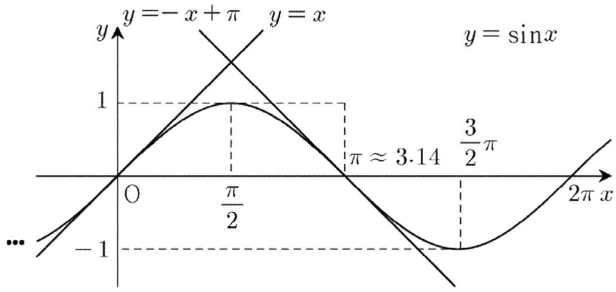
② 점대칭



위의 그림처럼 두 점 P, Q의 y좌표의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때 즉, $\sin\alpha=-\sin\beta$일 때, 단위원에서 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\pi$임을 알 수 있다. 두 점 $(\alpha,\ \sin\alpha)$, $(\beta,\ \sin\beta)$는 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이므로, 사인함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

✪ 사인함수의 그래프를 그릴 때 유의할 점 (접선, 오목과 볼록)

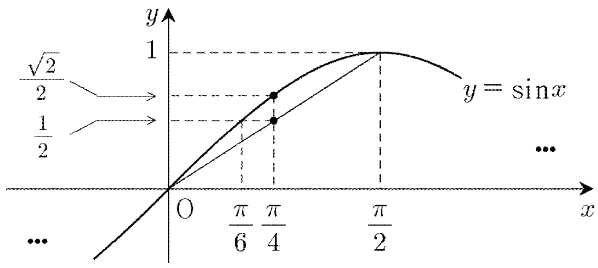
사인함수의 그래프를 그릴 때, 유의해야 하는 점들을 살펴보자.



사인함수 $y=\sin x$의 그래프를 그릴 때, 유의해야 하는 점들은 다음과 같다.

$\pi \approx 3.14$이므로 x축 위의 점 $(\pi,\ 0)$과 y축 위의 점 $(0,\ 1)$을 찍을 때, 비례관계(대략3 : 1)을 반드시 생각해야 한다.

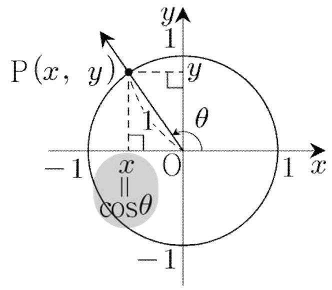
곡선 $y=\sin x$ 위의 원점 O에서의 접선은 $y=x$이고, 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선은 $y=-x+\pi$이다. 따라서 사인함수 $y=\sin x$의 그래프를 그리기 전에 이 두 직선을 그리고, 곡선이 두 직선에 접하도록 그려야 한다. (위의 그림) (삼각함수의 미분법과 접선의 방정식을 배우고 나면 이에 대한 증명을 할 수 있다.)



구간 $(0,\ \pi)$에서 곡선 $y=\sin x$는 위로 볼록이다. 예를 들어 위의 그림처럼 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$가 두 점 O, $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$을 잇는 선분의 위쪽에 있음을 확인할 수 있다.

▸ 코사인함수의 그래프

코사인 함수의 그래프를 그려보자.



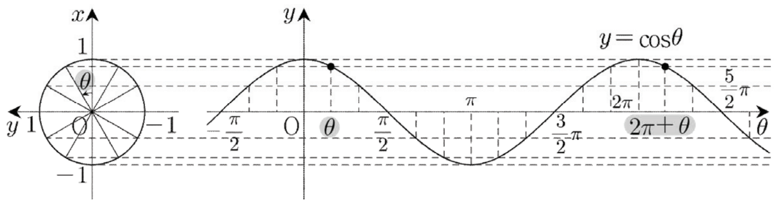
위의 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{x}{1}=x$$

이다.

따라서 θ의 값이 변할 때, $\cos\theta$의 값은 점 P의 x좌표로 정해진다.

단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\cos\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\cos\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다. 이때, θ의 값은 가로축에, $\cos\theta$의 값은 세로축에 나타낸다.



위의 그래프에서 함수 $y=\cos\theta$는 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 $\{y|-1\leq y\leq 1\}$이며, 모든 실수 θ에서 연속임을 알 수 있다.

일반적으로 함수의 정의역의 원소는 x로 나타내므로 코사인함수 $y=\cos\theta$에서 θ를 x로 바꾸어 $y=\cos x$로 나타내자.

함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 따라서 임의의 실수 x에 대하여

$$\cos(-x)=\cos x$$
$$\cos(x+2n\pi)=\cos x\ \ (n\text{은 정수})$$

가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $y=\cos x$는 주기가 2π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈함수 $y=\cos x$의 그래프와 성질〉

❶ 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.

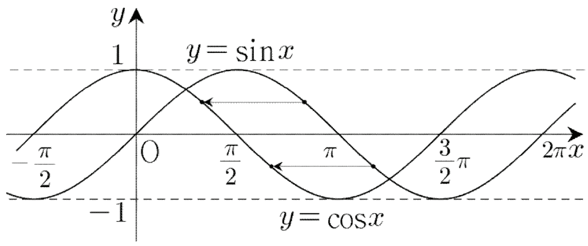
❷ 모든 실수에서 연속이다.

❸ 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉,
$\cos(-x)=\cos x$

❹ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉,
$\cos(2n\pi+x)=\cos x$ (단, n은 정수)

참고

코사인함수 $y=\cos x$의 그래프는 사인함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다. (삼각함수의 성질을 배우고 나면 이를 이해할 수 있다.)



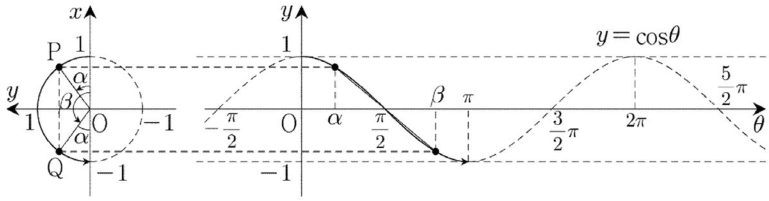
코사인함수 $y=\cos x$의 그래프는 사인함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같으므로 사인함수의 볼록성에 대한 성질, 선대칭과 점대칭에 대한 성질이 유지된다.

코사인함수 $y=\cos x$는 직선 $x=n\pi$에 대하여 대칭이고,
점 $\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ 0\right)$에 대하여 대칭이다. (단, n은 정수이다.)

✪ 코사인 함수의 대칭성 (점대칭, 선대칭)

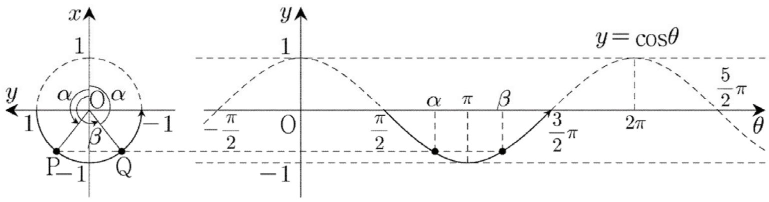
코사인함수 $y=\cos\theta$의 선대칭과 점대칭에 대한 성질을 좀 더 살펴보자.

① 점대칭



위의 그림처럼 두 점 P, Q의 x좌표의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때 즉, $\cos\alpha=-\cos\beta$일 때, 단위원에서 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$임을 알 수 있다. 두 점 $(\alpha,\ \cos\alpha)$, $(\beta,\ \cos\beta)$는 점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로, 코사인함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

② 선대칭



위의 그림처럼 두 점 P, Q의 x좌표가 같을 때 즉, $\cos\alpha=\cos\beta$일 때, 단위원에서 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\pi$임을 알 수 있다. 두 점 $(\alpha,\ \cos\alpha)$, $(\beta,\ \cos\beta)$는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로, 코사인함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이다.

✪ 코사인 함수의 그래프와 특수각

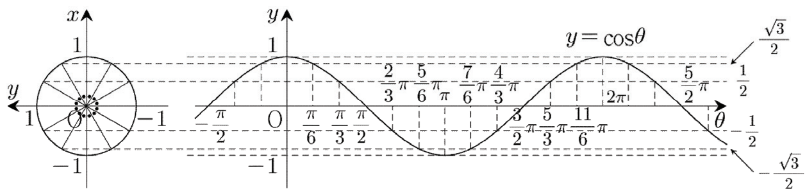
아래의 표를 다시 떠올리자.

육십분법의 각	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
호도법의 각	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

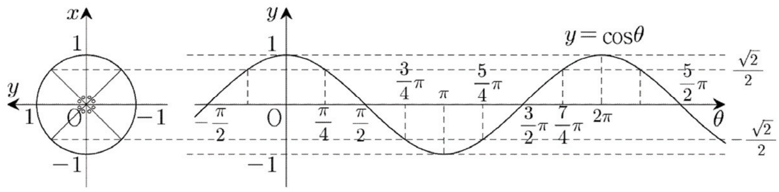
육십분법의 각	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
호도법의 각	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

위의 표의 각 각에 대한 코사인함수의 값은 다음과 같다.

(단, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$)



(단, ●$=30^\circ$)



(단, ○$=45^\circ$)

위의 그림을 흰 종이에 몇 번 따라 그리고 절대 잊지 말도록 하자.

예제 6

다음 함수의 치역과 주기를 구하고 그래프를 그려라.

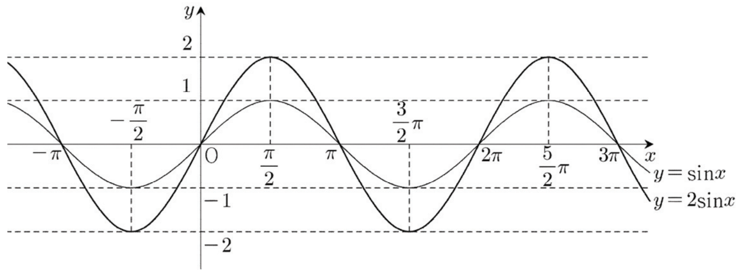
(1) $y=2\sin x$ (2) $y=\cos 2x$

풀이

(1) $-2\le 2\sin x\le 2$이므로 치역은 $\{y|-2\le y\le 2\}$이다.

또 $2\sin x=2\sin(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

함수 $y=2\sin x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 것이므로 다음 그림과 같다.



(2) $-1\le\cos 2x\le 1$이므로 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.

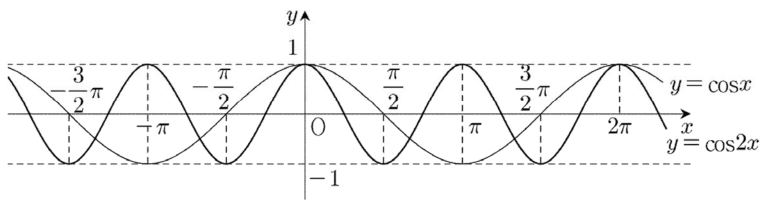
또 $\cos 2x=\cos(2x+2\pi)=\cos 2(x+\pi)$이므로 주기는 π이다.

(←✪코사인함수의 주기가 2π이므로 $\cos\boxed{2x}=\cos(\boxed{2x}+2\pi)$

($\cos☆=\cos(☆+2\pi)$의 꼴)로 둔 것이다.

이를 변형하면 $\cos 2\boxed{x}=\cos 2(\boxed{x+\pi})$(즉, x의 자리에 $x+\pi$를 대입해도 함숫값이 같다.)이므로 함수 $y=\cos 2x$의 주기는 π이다.)

함수 $y=\cos 2x$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이참조

문제 16

p.26

다음 함수의 치역과 주기를 구하고 그래프를 그려라.

(1) $y=\sin\frac{x}{2}$　　　　(2) $y=\frac{1}{2}\cos x$

참고

삼각함수 $y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|b|}$이고, 최댓값은 $|a|$, 최솟값은 $-|a|$이다.

✪ 삼각함수(사인함수, 코사인함수)의 주기성(1)

위의 '참고'는 이렇게 생각하면 편하다.

- 삼각함수 $y=a\sin\boxed{bx}$에서 $t=bx$로 두면 t가 0에서 2π까지 변할 때(즉, 사인함수의 주기만큼만 변할 때), x는 0에서 $\frac{2\pi}{b}$까지 변한다.

  이때, x가 갖는 값의 구간의 길이는 $\frac{2\pi}{|b|}$이므로 삼각함수 $y=a\sin bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이다. 이때, 절댓값이 붙는 이유는 주기가 항상 양수이기 때문이다.

- 삼각함수 $y=a\cos\boxed{bx}$에서 $t=bx$로 두면 t가 0에서 2π까지 변할 때(즉, 코사인함수의 주기만큼만 변할 때), x는 0에서 $\frac{2\pi}{b}$까지 변한다.

  이때, x가 갖는 값의 구간의 길이는 $\frac{2\pi}{|b|}$이므로 삼각함수 $y=a\cos bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이다. 이때, 절댓값이 붙는 이유는 주기가 항상 양수이기 때문이다.

✪ 삼각함수의 그래프 – 평행이동, 확대축소, 주기(1)

삼각함수의 주기에 대하여 좀 더 자세하게 알아보자.

예를 들어 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$의 그래프를 그리고, 주기에 대하여 생각해보자.

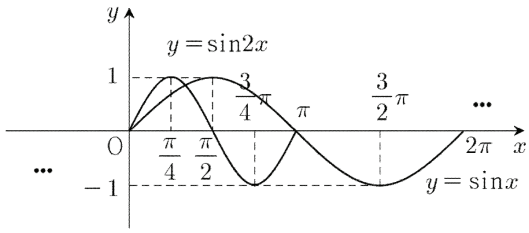
우선 주어진 함수의 방정식을 정리하면 다음과 같다.

$y-1=3\sin2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 즉, $1\cdot y-1=3\sin2\left(1\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)$

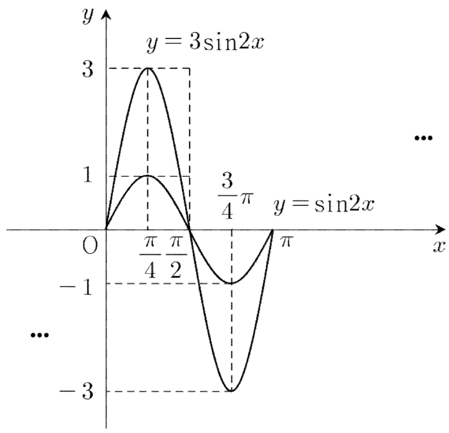
위와 같이 x와 y의 바로 앞에 곱해진 수가 1이 되도록 변형해야 한다. (그래야 평행이동을 정확하게 판단할 수 있다.)

이제 함수 $y=3\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$의 그래프와 일치한다.

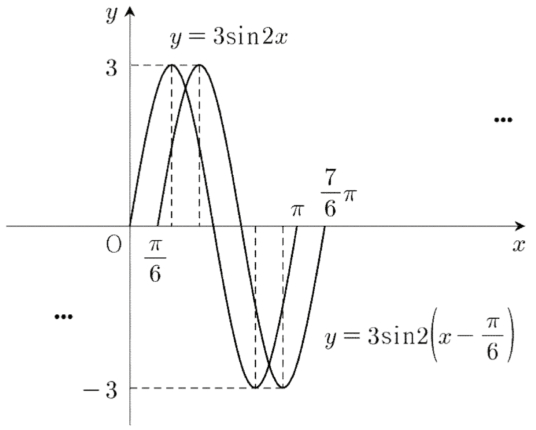
함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배하면(축소하면) 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 일치한다. (※ x의 자리에 $kx(k\neq 0)$를 대입하면 x축의 방향으로 $\frac{1}{k}$배하게 된다. 이때, $|k|<1$이면 확대되고, $|k|>1$이면 축소된다.)



함수 $y=\sin 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배하면(확대하면) 함수 $y=3\sin 2x$의 그래프와 일치한다. (※ y의 자리에 $ky(k\neq 0)$를 대입하면 y축의 방향으로 $\frac{1}{k}$배하게 된다. 이때, $|k|<1$이면 확대되고, $|k|>1$이면 축소된다.)

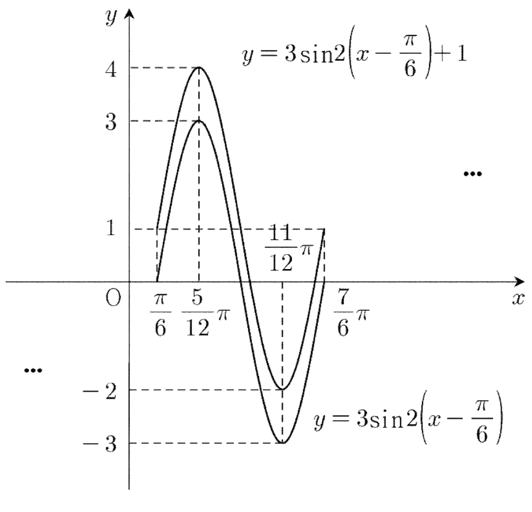


함수 $y=3\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동시키면 함수 $y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프와 일치한다.



함수 $y=3\sin2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면

함수 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$의 그래프와 일치한다.



일반적으로 평행이동, (x축 또는 y축에 대한) 대칭이동, y축 방향으로의 확대축소는 주기에 영향을 주지 않으므로,

함수 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$의 주기는 함수 $y=\sin2x$의 주기와 같다.

✪ 삼각함수의 그래프 - 평행이동, 확대축소, 주기(2)

그렇다면 다음과 같이 정리할 수 있다.

- 삼각함수 $y=a\sin(bx+c)+d$ $\left(y-d=a\sin b\left\{x-\left(-\frac{c}{b}\right)\right\}\right)$의 그래프는 함수 $y=a\sin bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동시킨 것이므로

  주기: $\frac{2\pi}{|b|}$, 최댓값: $|a|+d$, 최솟값: $-|a|+d$

- 삼각함수 $y=a\cos(bx+c)+d$ $\left(y-d=a\cos b\left\{x-\left(-\frac{c}{b}\right)\right\}\right)$의 그래프는 함수 $y=a\cos bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동시킨 것이므로

  주기: $\frac{2\pi}{|b|}$, 최댓값: $|a|+d$, 최솟값: $-|a|+d$

위의 결과는 암기하지 말고, 그래프의 개형으로 이해해야 한다.

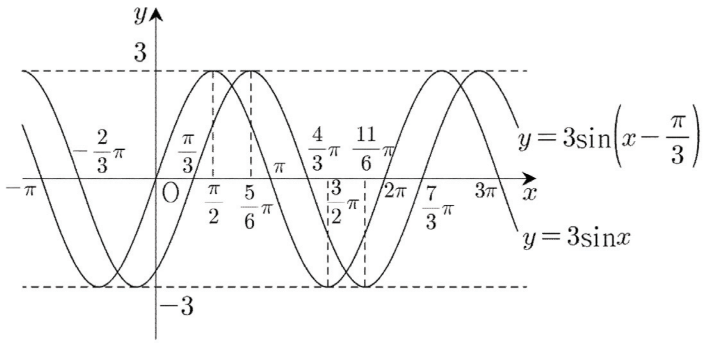
예제 7

다음 함수의 그래프를 그리고, 최댓값과 최솟값을 구하여라.

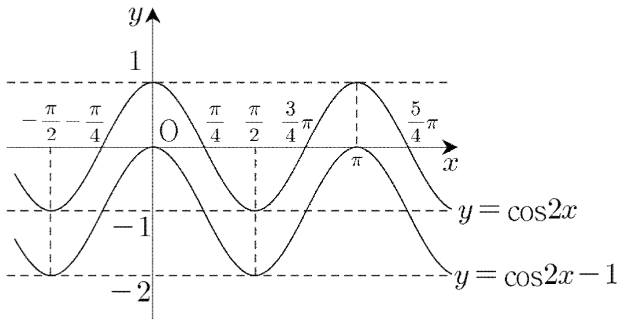
(1) $y=3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　　　(2) $y=\cos 2x-1$

풀이

(1) 함수 $y=3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=3\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다.



(2) 함수 $y=\cos 2x-1$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다.



답 풀이 참조

〈연습17〉
✪ 이 문제를 풀 때, 두 상수 a, c로 결정되는 값, 상수 b로 결정되는 값을 생각한다면 정갈한 풀이를 써내려갈 수 있다.

연습 17

p.26

세 양수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+c$$

가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, abc의 값을 구하여라.

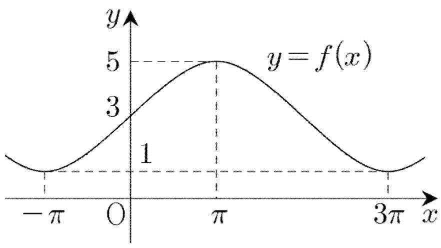
(가) 함수 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값은 $\frac{\pi}{3}$이다.

〈연습18〉
✪ 이 문제를 풀 때, 두 상수 a, c로 결정되는 값, 상수 b로 결정되는 값을 생각한다면 정갈한 풀이를 써내려갈 수 있다.

연습 18

p.26

아래 그림은 함수 $f(x)=a\cos\left(bx-\frac{\pi}{2}\right)+c$의 그래프의 일부이다.



$f\left(\frac{8}{3}\pi\right)$의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)

문제 19

p.26

다음 함수의 그래프를 그리고, 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=\sin 2x+1$ (2) $y=-2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+1$

연습 20

p.27

함수 $f(x)=\cos^2 x-2\sin x$에 대하여 다음의 물음에 답하여라.

(1) 구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합

(2) 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합

✪ 각의 통일, 삼각함수의 통일

두 삼각함수 $\sin x$와 $\cos x$의 각이 x로 통일 되어 있으니, 전체 식을 $\sin x$ 또는 $\cos x$로 통일시켜야 한다. $\cos x=t$로 두어야 하는지, $\sin x=t$로 두어야 하는지에 대하여 고민해보자. 그리고 치환하고 나서 바로 해주어야 할 일은? 그렇다. t의 범위를 정해주어야 한다. 요컨대 '각 통일 → 삼각함수 통일(사인 또는 코사인) → t의 범위 결정' 의 순서대로 문제를 풀어나가면 된다. 이는 위의 유형과 같은 문제들에 대한 전형적인 풀이순서이므로 반드시 익혀두길 바란다.

〈연습21〉
✪ 어떤 삼각함수로 통일해야 할지 딱 보이는가?

연습 21

p.27

모든 실수 θ에 대하여 부등식 $\sin^2\theta-4\cos\theta\leq k$가 성립할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

연습 22

p.27

$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x = \cos 2x$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

✪ '실근의 개수를 구하라.' 가 가진 의미

현행 교육과정에서는 삼각함수에 대한 배각, 반각 공식을 배우지 않으므로 위의 문제에서 주어진 각을 통일할 수 없다. 그리고 방정식을 주고 '실근을 구하시오.' 라고 하지 않고 '서로 다른 실근의 개수를 구하시오.' 라고 하였으므로 방정식에서 주어진 두 곡선의 교점의 개수를 구하면 된다. 즉, 이 문제는 대수적인 방법이 아닌, 기하학적 관점에서 해결해야 한다.

연습 23

p.28

$0 \le x < 2\pi$일 때, 자연수 n에 대하여 방정식 $3\sin(nx)+1=0$의 실근의 개수를 a_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하여라.

〈연습24〉
✪ 이 문제는 그래프의 개형을 얼마나 정확하게 그리는가를 평가하고 있다.

연습 24

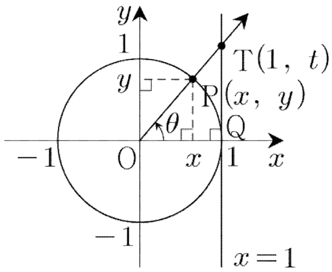
p.28

$0 \le x \le \pi$일 때, 함수 $f(x)=\sin(\cos x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M_f, m_f, 함수 $g(x)=\cos(\sin x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M_g, m_g라고 하자. 네 수 M_f, m_f, M_g, m_g의 대소 관계를 밝히시오. [3점]

▸ 탄젠트함수의 그래프

탄젠트함수의 그래프는 어떻게 그리는가?

탄젠트함수의 그래프를 그려 보자.

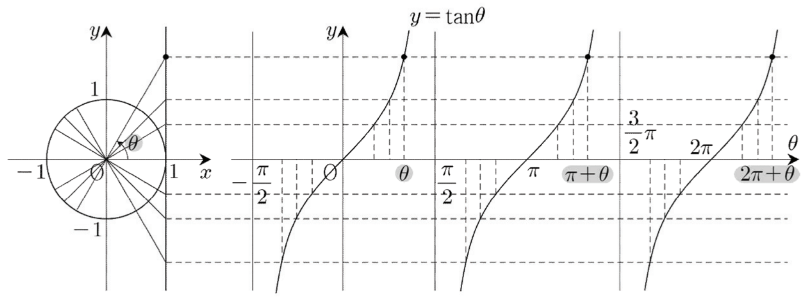


위의 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고, 단위원 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선과 동경 OP가 만나는 점을 $\mathrm{T}(1,\ t)$라고 하면

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{t}{1}=t$$

이다. 따라서 θ의 값이 변할 때, $\tan\theta$의 값은 점 T의 y좌표로 정해진다. (물론 $\tan\theta$의 값은 직선 OP의 기울기와도 같다.)

단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\tan\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\tan\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다. 이때, θ의 값을 가로축에, $\tan\theta$의 값을 세로축에 나타낸다.



한편 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$은 정수)일 때, 각 θ를 나타내는 동경 OP는 y축 위에 있다. 이때 점 P의 x좌표는 0이므로 $\tan\theta$의 값은 정의되지 않고, 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$은 정수)는 모두 $y=\tan\theta$의 점근선이다.

따라서 함수 $y=\tan\theta$는 정의역은 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 또 함수 $y=\tan\theta$는 정의역의 모든 점에서 연속이다.

일반적으로 함수의 정의역의 원소는 x로 나타내므로 탄젠트함수 $y=\tan\theta$에서 θ를 x로 바꾸어 $y=\tan x$로 나타내자.

한편 함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 따라서 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)인 모든 실수 x에 대하여

$$\tan(-x)=-\tan x$$
$$\tan(n\pi+x)=\tan x$$

가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $y=\tan x$는 주기가 π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈함수 $y=\tan x$의 그래프와 성질〉

❶ 정의역은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

❷ 정의역의 모든 점에서 연속이다.

❹ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉,
$\tan(-x)=-\tan x$

❹ 주기가 π인 주기함수이다. 즉,
$\tan(n\pi+x)=\tan x$ (단, n은 정수)

❸ 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)이다.

참고

삼각함수 $y=a\tan bx$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

✪ 삼각함수(탄젠트함수)의 주기성(2)

위의 ‘참고’ 는 이렇게 생각하면 편하다.

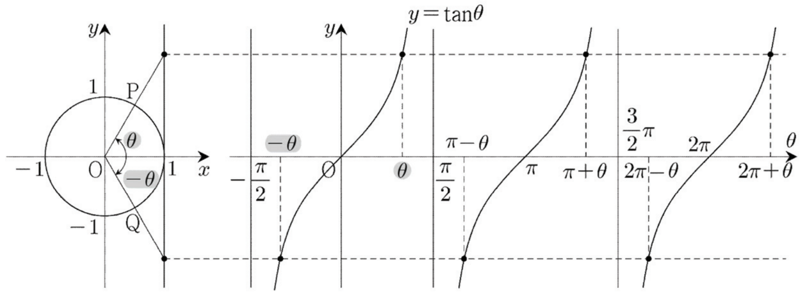
- 삼각함수 $y=a\tan\boxed{bx}$에서 $t=bx$로 두면 t가 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때(즉, 탄젠트함수의 주기만큼만 변할 때), x는 $-\frac{\pi}{2b}$에서 $\frac{\pi}{2b}$까지 변한다.

이때, x가 갖는 값의 구간의 길이는 $\frac{\pi}{|b|}$이므로 삼각함수 $y=a\tan bx$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다. 이때, 절댓값이 붙는 이유는 주기는 항상 양수이기 때문이다.

✪ 탄젠트 함수의 대칭성(점대칭)과 주기성

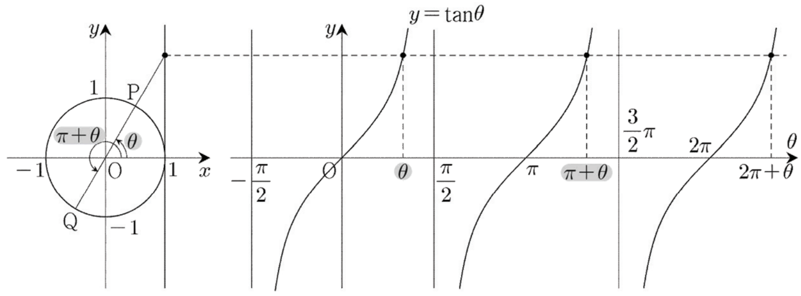
탄젠트함수 $y=\tan\theta$의 대칭성과 주기에 대하여 한 번 더 생각해보자.

① 대칭성(점대칭)



위의 그림처럼 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각의 크기를 각각 θ, $-\theta$라고 할 때, $\tan\theta$, $\tan(-\theta)$는 각각 두 직선 OP, OQ의 기울기와 같으므로 $\tan(-\theta)=-\tan\theta$이다. 일반적으로 이는 탄젠트 함수가 정의되는 모든 실수 θ에 대하여 성립한다.

② 주기



위의 그림처럼 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각의 크기를 각각 θ, $\pi+\theta$라고 할 때, $\tan\theta$, $\tan(\pi+\theta)$는 각각 두 직선 OP, OQ의 기

울기와 같으므로 $\tan\theta=\tan(\pi+\theta)$이다. 왜냐하면 세 점 O, P, Q는 일직선 위에 있기 때문이다. 일반적으로 이는 탄젠트 함수가 정의되는 모든 실수 θ에 대하여 성립한다.

✪ 탄젠트 함수의 그래프와 특수각

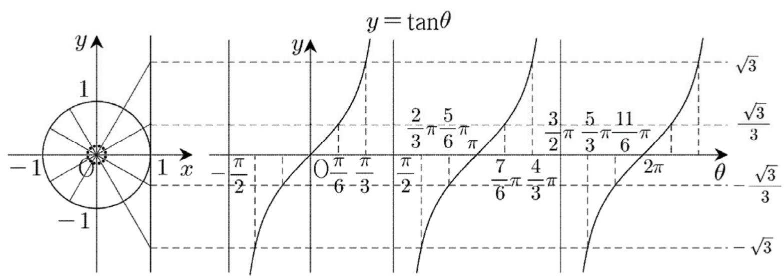
아래의 표를 다시 떠올리자.

육십분법의 각	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
호도법의 각	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

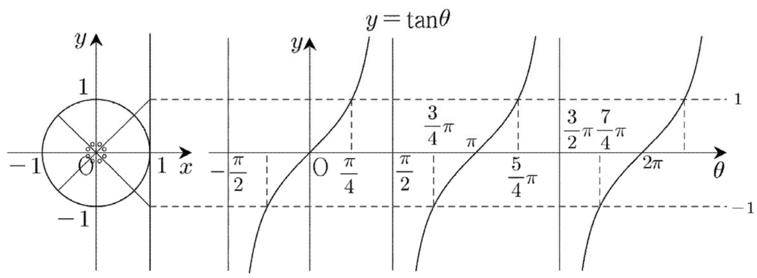
육십분법의 각	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
호도법의 각	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

위의 표의 각 각에 대한 탄젠트함수의 값은 다음과 같다.

(단, $\sqrt{3}\approx1.73$, $\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0.58$)



(단, ●$=30^\circ$)

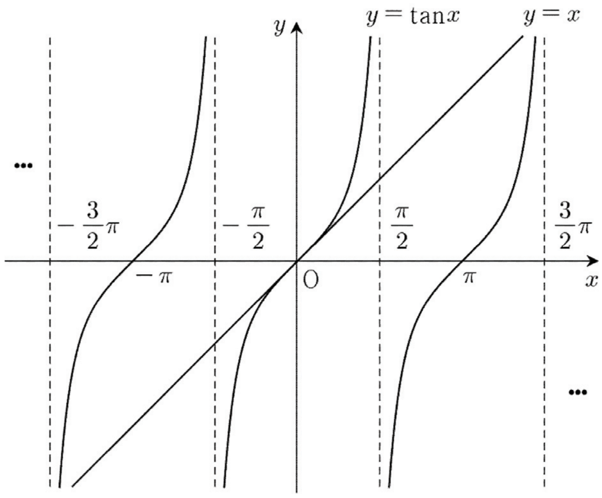


(단, ○$=45^\circ$)

위의 그림을 흰 종이에 몇 번 따라 그리고 절대 잊지 말도록 하자.

✪ 탄젠트함수의 그래프를 그릴 때 유의할 점 (접선, 점근선, 오목과 볼록)

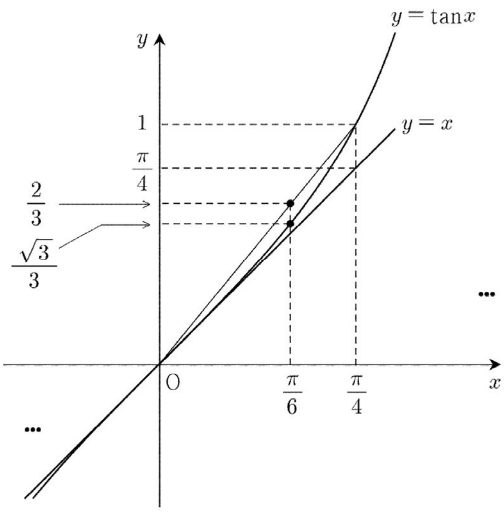
탄젠트함수의 그래프를 그릴 때, 유의해야 하는 점들을 살펴보자.



탄젠트함수 $y=\tan x$의 그래프를 그릴 때, 유의해야 하는 점들은 다음과 같다.

사인함수, 코사인함수와 다르게 탄젠트함수의 그래프는 무수히 많은 점근선을 가진다. 탄젠트함수의 그래프를 그리기 전에 반드시 점근선을 그어야 한다.

곡선 $y=\tan x$ 위의 원점 O에서의 접선은 $y=x$이다. 따라서 탄젠트함수 $y=\tan x$의 그래프를 그리기 전에 이 직선을 그리고, 곡선이 이 직선에 접하도록 그려야 한다. (위의 그림) (삼각함수의 미분법과 접선의 방정식을 배우고 나면 이에 대한 증명을 할 수 있다.)



구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 곡선 $y=\tan x$는 아래로 볼록이다. 예를 들어 위

의 그림처럼 곡선 $y=\tan x$ 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$이 두 점 O, $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$을 잇는 선분의 아래쪽에 있음을 확인할 수 있다.

✪ 삼각함수의 그래프 - 평행이동, 확대축소, 주기(3)

삼각함수 $y=a\tan(bx+c)+d$ $\left(y-d=a\tan b\left\{x-\left(-\dfrac{c}{b}\right)\right\}\right)$의 그래프는 함수 $y=a\tan bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동시킨 것이므로

주기: $\dfrac{\pi}{|b|}$ (그런데 최댓값, 최솟값은 갖지 않는다!)

예제 8

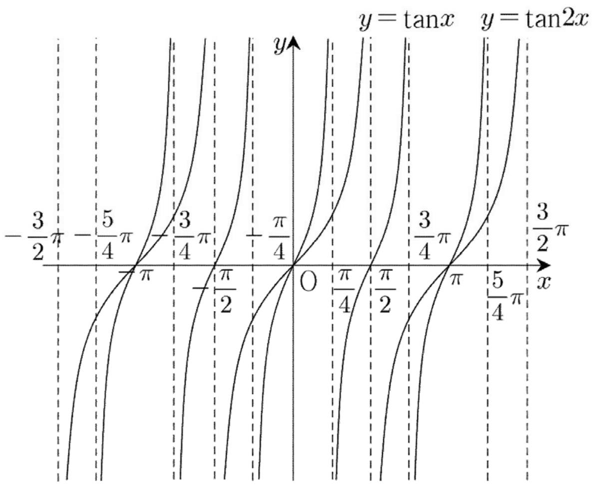
다음 함수의 주기와 점근선의 방정식을 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\tan 2x$　　　　(2) $y=\dfrac{1}{2}\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

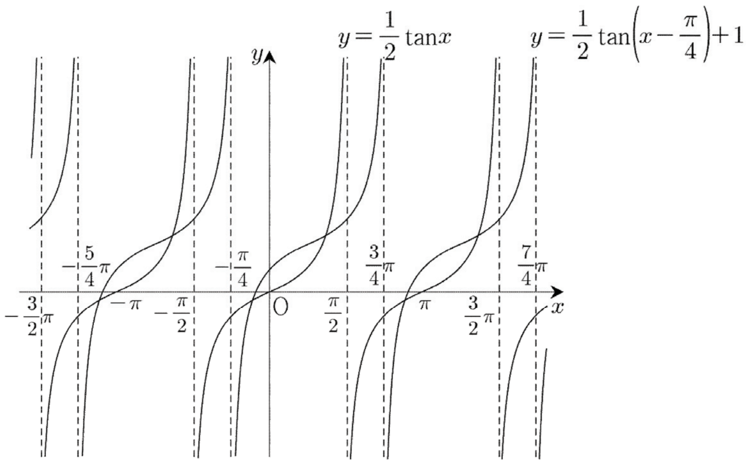
풀이

(1) $\tan 2x=\tan(2x+\pi)=\tan 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이고, 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{n}{2}\pi+\dfrac{\pi}{4}$($n$은 정수)이며, $y=\tan 2x$의 그래프는 아래 그림과 같다.



(2) 함수 $y=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배하고, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 두 함수의 주기는 π로 서로 같고, 문제에서 주어진 함수의 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$(n은 정수)이다. 함수 $y=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$의 그래프는 아래 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 25

p.28

다음 함수의 주기와 점근선의 방정식을 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=3\tan\frac{x}{2}$　　　　(2) $y=2\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-1$

〈연습26〉

✪ 이 문제에서 주어진 함수의 방정식을 어떤 삼각함수(사인, 코사인, 탄젠트)로 통일해야 풀이가 편할지 고민해보라.

연습 26

p.29

$0\le x<\frac{\pi}{2}$일 때, 함수 $f(x)=4\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}-3$의 최솟값을 구하여라.

▸ 삼각함수의 성질

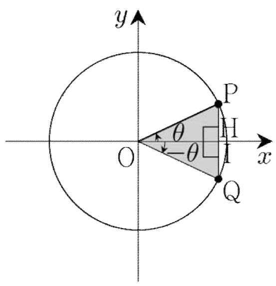
삼각함수는 어떤 성질이 있는가?

✪ 삼각함수의 성질 (단위원) (1)

교과서에서는 삼각함수의 성질을 삼각함수의 그래프의 개형을 이용하여 설명하고 있다. 이를 배우기 전에 단위원을 이용하여 삼각함수의 성질을 유도해보자. (사실 단위원을 이용한 증명이 더 중요하다.)

(1) $-\theta$의 삼각함수

아래 그림과 같이 두 각 θ, $-\theta$를 나타내는 두 동경과 단위원의 교점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



위의 그림에서 $\triangle \mathrm{POH} \equiv \triangle \mathrm{QOI}$이므로

$\overline{\mathrm{OI}} = \overline{\mathrm{OH}}$에서 (점 Q의 x좌표)=(점 P의 x좌표)

$\overline{\mathrm{QI}} = \overline{\mathrm{PH}}$에서 (점 Q의 y좌표)=−(점 P의 y좌표)

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\cos(-\theta),\ \sin(-\theta))$

(점 Q의 x좌표)=(점 P의 x좌표)$=\cos\theta$

(점 Q의 y좌표)=−(점 P의 y좌표)$=-\sin\theta$

이므로

$\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

한편 (직선 OQ의 기울기)=−(직선 OP의 기울기)이므로

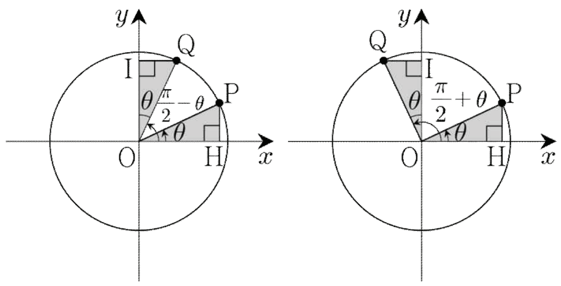
(∵ 두 직선 OP, OQ는 x축에 대하여 대칭이다.)

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

위의 성질은 θ가 제1사분면의 각이 아니어도 항상 성립한다.

(2) $\dfrac{\pi}{2} \pm \theta$의 삼각함수

아래 그림과 같이 두 각 θ, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$를 나타내는 두 동경과 단위원의 교점을 각각 P, Q라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



- $\frac{\pi}{2}-\theta$인 경우

위의 그림에서 $\triangle \mathrm{POH}\equiv\triangle \mathrm{QOI}$이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OH}}$에서 (점 Q의 y좌표)=(점 P의 x좌표)

$\overline{\mathrm{QI}}=\overline{\mathrm{PH}}$에서 (점 Q의 x좌표)=(점 P의 y좌표)

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

(점 Q의 x좌표)=(점 P의 y좌표)$=\sin\theta$

(점 Q의 y좌표)=(점 P의 x좌표)$=\cos\theta$

이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

한편 (직선 OQ의 기울기)×(직선 OP의 기울기)$=1$이므로
($\because$ 두 직선 OP, OQ는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.)

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

위의 성질은 θ가 제1사분면의 각이 아니어도 항상 성립한다.

- $\frac{\pi}{2}+\theta$인 경우

위의 그림에서 $\triangle \mathrm{POH}\equiv\triangle \mathrm{QOI}$이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OH}}$에서 (점 Q의 y좌표)=(점 P의 x좌표)

$\overline{\mathrm{QI}}=\overline{\mathrm{PH}}$에서 (점 Q의 x좌표)$=-$(점 P의 y좌표)

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

(점 Q의 x좌표)$=-$(점 P의 y좌표)$=-\sin\theta$

(점 Q의 y좌표)=(점 P의 x좌표)$=\cos\theta$

이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

한편 (직선 OQ의 기울기)×(직선 OP의 기울기)=−1이므로

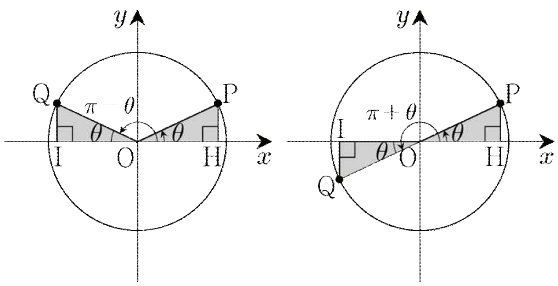
(∵두 직선 OP, OQ는 서로 수직이다.)

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

위의 성질은 θ가 제1사분면의 각이 아니어도 항상 성립한다.

(3) $\pi\pm\theta$의 삼각함수

아래 그림과 같이 두 각 θ, $\pi\pm\theta$를 나타내는 두 동경과 단위원의 교점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



- $\pi-\theta$인 경우

위의 그림에서 △POH≡△QOI이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OH}}$에서 (점 Q의 x좌표)=−(점 P의 x좌표)

$\overline{\mathrm{QI}}=\overline{\mathrm{PH}}$에서 (점 Q의 y좌표)=(점 P의 y좌표)

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\cos(\pi-\theta),\ \sin(\pi-\theta))$

(점 Q의 x좌표)=−(점 P의 x좌표)$=-\cos\theta$

(점 Q의 y좌표)=(점 P의 y좌표)$=\sin\theta$

이므로

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

한편 (직선 OQ의 기울기)=−(직선 OP의 기울기)이므로

(∵두 직선 OP, OQ는 x축에 대하여 대칭이다.)

$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

위의 성질은 θ가 제1사분면의 각이 아니어도 항상 성립한다.

- $\pi+\theta$인 경우

위의 그림에서 △POH≡△QOI이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OH}}$에서 (점 Q의 x좌표)=−(점 P의 x좌표)

$\overline{QI}=\overline{PH}$에서 (점 Q의 y좌표)$=-$(점 P의 y좌표)

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\cos(\pi+\theta),\ \sin(\pi+\theta))$

(점 Q의 x좌표)$=-$(점 P의 x좌표)$=-\cos\theta$

(점 Q의 y좌표)$=-$(점 P의 y좌표)$=-\sin\theta$

이므로

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

한편 (직선 OQ의 기울기)=(직선 OP의 기울기)이므로

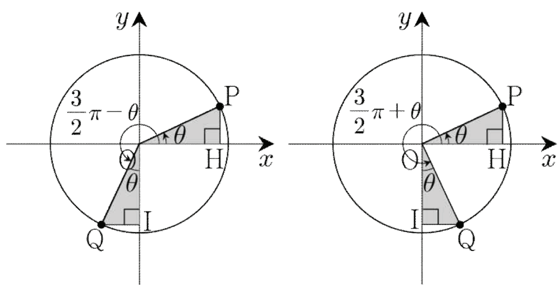
($\because$ 두 직선 OP, OQ는 일치한다)

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

위의 성질은 θ가 제1사분면의 각이 아니어도 항상 성립한다.

(4) $\dfrac{3}{2}\pi\pm\theta$의 삼각함수

아래 그림과 같이 두 각 θ, $\dfrac{3}{2}\pi\pm\theta$를 나타내는 두 동경과 단위원의 교점을 각각 P, Q라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



- $\dfrac{3}{2}\pi-\theta$인 경우

위의 그림에서 $\triangle\mathrm{POH}\equiv\triangle\mathrm{QOI}$이므로

$\overline{OI}=\overline{OH}$에서 (점 Q의 y좌표)$=-$(점 P의 x좌표)

$\overline{QI}=\overline{PH}$에서 (점 Q의 x좌표)$=-$(점 P의 y좌표)

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}\left(\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right),\ \sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)\right)$

(점 Q의 x좌표)$=-$(점 P의 y좌표)$=-\sin\theta$

(점 Q의 y좌표)$=-$(점 P의 x좌표)$=-\cos\theta$

이므로

$\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$

한편 (직선 OQ의 기울기)×(직선 OP의 기울기)＝1이므로
(∵두 직선 OP, OQ는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.)

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cot\theta$$

위의 성질은 θ가 제1사분면의 각이 아니어도 항상 성립한다.

• $\frac{3}{2}\pi+\theta$인 경우

위의 그림에서 $\triangle POH \equiv \triangle QOI$이므로

$\overline{OI}=\overline{OH}$에서 (점 Q의 y좌표)=−(점 P의 x좌표)

$\overline{QI}=\overline{PH}$에서 (점 Q의 x좌표)=(점 P의 y좌표)

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$$P(\cos\theta,\ \sin\theta),\ Q\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\right)$$

(점 Q의 x좌표)=(점 P의 y좌표)＝$\sin\theta$

(점 Q의 y좌표)=−(점 P의 x좌표)＝$-\cos\theta$

이므로

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta,\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$$

한편 (직선 OQ의 기울기)×(직선 OP의 기울기)=−1이므로
(∵두 직선 OP, OQ는 서로 수직이다.)

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cot\theta$$

위의 성질은 θ가 제1사분면의 각이 아니어도 항상 성립한다.

정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈삼각함수의 성질〉

(1) $-\theta$의 삼각함수

$\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(2) $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

(3) $\pi\pm\theta$의 삼각함수

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

(4) $\frac{3}{2}\pi\pm\theta$의 삼각함수

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$,

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cot\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$,

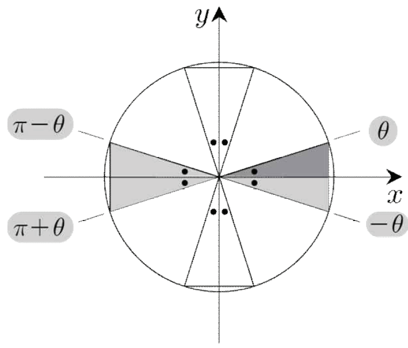
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cot\theta$

위의 성질은 암기할 수 없다. 위의 공식이 필요할 때마다, 머릿속에 단위원을 그려서 유도할 수 있어야 한다. 이런 수준에 오르기 위해서는 흰 종이 위에 단위원을 그려서 수차례 유도해보아야 한다.

✪ 삼각함수의 성질 (단위원) (2) – 암기하는 방법

삼각함수의 성질을 다음과 같이 정리하자.

❶ $-\theta$, $\pi\pm\theta$의 삼각함수



(단, ●는 θ이다.)

- $-\theta$의 삼각함수

$\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

- $\pi\pm\theta$의 삼각함수

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

위의 9개의 등식에 대하여

좌변이 $\cos$이면 우변도 $\cos$이고,

좌변이 $\sin$이면 우변도 $\sin$이고,

좌변이 $\tan$이면 우변도 $\tan$이다.

이제 부호는 다음과 같이 결정한다.

예를 하나 들어보면.

θ가 예각일 때, $\pi+\theta$는 제3사분면의 각이므로 $\cos(\pi+\theta)$의 부호는 음(−)이다.

따라서

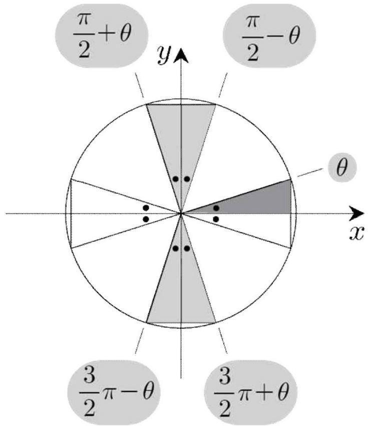
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ ($\cos$은 유지되고, 이 앞에 $-$가 붙는다.)

이다.

물론 θ가 예각이 아니어도 위의 등식은 성립한다.

마찬가지의 방법으로 위의 9개의 등식을 유도할 수 있다.

❷ $\frac{\pi}{2}\pm\theta$, $\frac{3}{2}\pi\pm\theta$의 삼각함수



(단, ●는 θ이다.)

- $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

- $\frac{3}{2}\pi\pm\theta$의 삼각함수

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$, $\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cot\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$, $\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cot\theta$

위의 12개의 등식에 대하여
좌변이 cos이면 우변은 sin이고,　(cos은 sin으로 바뀐다!)
좌변이 sin이면 우변도 cos이고,　(sin은 cos으로 바뀐다!)
좌변이 tan이면 우변도 cot이다.　(tan는 cot으로 바뀐다!)
이제 부호는 다음과 같이 결정한다.
예를 하나 들어보면.
θ가 예각일 때, $\frac{3}{2}\pi+\theta$는 제4사분면의 각이므로 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$의 부호는 양(+)이다.
따라서

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$ (cos은 sin으로 바뀌고, 이 앞에 +가 붙는다.)

이다.
물론 θ가 예각이 아니어도 위의 등식은 성립한다.
마찬가지의 방법으로 위의 12개의 등식을 유도할 수 있다.

아래부터는 교과서 본문의 삼각함수의 성질에 대한 설명이다.

삼각함수의 성질에 대하여 알아보자.

(1) $2n\pi+x$의 삼각함수 (단, n은 정수)

함수 $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 주기는 2π이므로

$$y=\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x+4\pi)=\cdots$$

$$y=\cos x=\cos(x+2\pi)=\cos(x+4\pi)=\cdots$$

이다.

마찬가지로 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

$$y=\tan x=\tan(x+\pi)=\tan(x+2\pi)=\cdots$$

이다.

따라서 다음이 성립한다.

기본개념

〈$2n\pi+x$(n은 정수)의 삼각함수〉

$\sin(2n\pi+x)=\sin x$

$\cos(2n\pi+x)=\cos x$

$\tan(2n\pi+x)=\tan x$

문제 27

p.29

다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$ (2) $\cos\frac{9}{4}\pi$ (3) $\tan\frac{13}{6}\pi$

(2) $-x$의 삼각함수

함수 $y=\sin x$와 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\sin(-x)=-\sin x,\ \tan(-x)=-\tan x$$
$$(\leftarrow f(-x)=-f(x))$$

가 성립한다.

또 함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\cos(-x)=\cos x \qquad (\leftarrow f(-x)=f(x))$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈$-x$의 삼각함수〉

$\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(-x)=\cos x$

$\tan(-x)=-\tan x$

문제 28

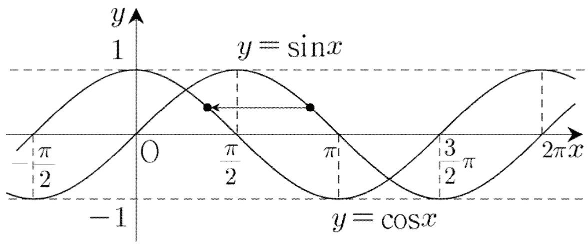
p.29

다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ (2) $\cos\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right)$

(3) $\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)$

(3) $\dfrac{\pi}{2}\pm x$의 삼각함수



위의 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.

따라서

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \qquad \cdots ㉠$$

이다.

㉠에 x 대신 $x-\dfrac{\pi}{2}$를 대입하면

$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

이므로 여기서 x 대신 $-x$를 대입하고 함수 $y=\sin x$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고 함수 $y=\cos x$의 그래프가 y축에 대하여 대칭임을 이용하면

$$\sin(-x)=\cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\}$$

$$-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

이다.

즉, 다음이 성립한다.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\cot x$$

이다.

또 ㉠, ㉡에 각각 x 대신 $-x$를 대입하면

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(-x)=\cos x \qquad \cdots ㉢$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin(-x)=\sin x \qquad \cdots ㉣$$

이고, ㉢, ㉣에 의하여

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈$\frac{\pi}{2}\pm x$의 삼각함수〉

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$, $\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

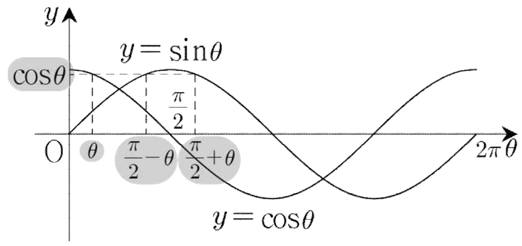
보기

(1) $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\tan 150^\circ=\tan(90^\circ+60^\circ)=-\cot 60^\circ=-\frac{1}{\tan 60^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

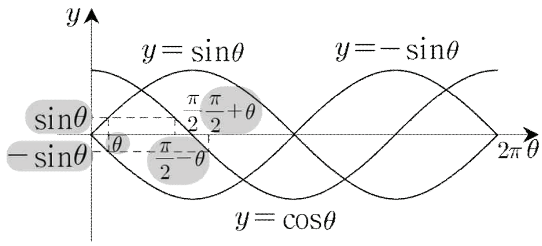
✪ 삼각함수의 성질 (그래프) (1)

다음과 같이 삼각함수의 그래프의 개형에서 위의 공식들을 유도할 수 있다.



위의 그래프에서

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$



위의 그래프에서

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

그런데 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta,\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

문제 29

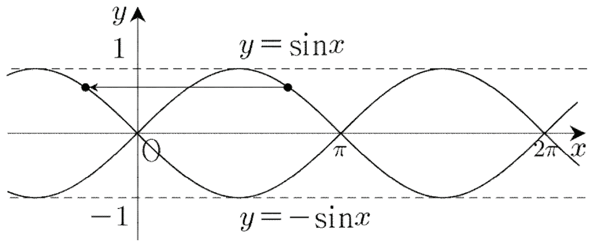
p.29

다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin\frac{5}{6}\pi$ (2) $\cos\frac{3}{4}\pi$ (3) $\tan\frac{2}{3}\pi$

(4) $\pi \pm x$의 삼각함수

함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동하면 $y=-\sin x$의 그래프와 같아진다.



따라서

$$\sin(\pi+x)=-\sin x$$

이다.

같은 방법으로

$$\cos(\pi+x)=-\cos x$$

임을 알 수 있다.

한편 탄젠트함수의 주기는 π이므로

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

이다.

또 위의 식에 각각 x 대신 $-x$를 대입하면

$$\sin(\pi-x)=-\sin(-x)=\sin x$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos(-x)=-\cos x$$

$$\tan(\pi-x)=\tan(-x)=-\tan x$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기본개념

〈$\pi \pm x$의 삼각함수〉

$\sin(\pi+x)=-\sin x$,	$\sin(\pi-x)=\sin x$
$\cos(\pi+x)=-\cos x$,	$\cos(\pi-x)=-\cos x$
$\tan(\pi+x)=\tan x$,	$\tan(\pi-x)=-\tan x$

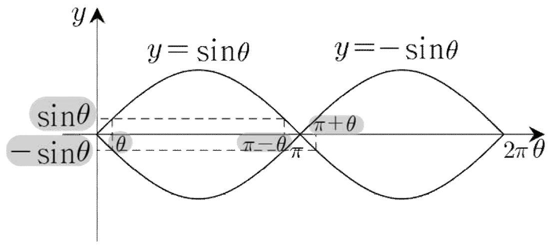
보기

(1) $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

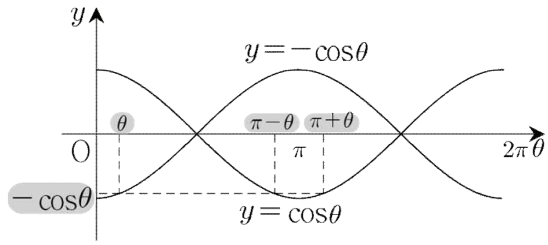
✪ 삼각함수의 성질 (그래프) (2)

다음과 같이 삼각함수의 그래프의 개형에서 위의 공식들을 유도할 수 있다.



위의 그래프에서

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$



위의 그래프에서

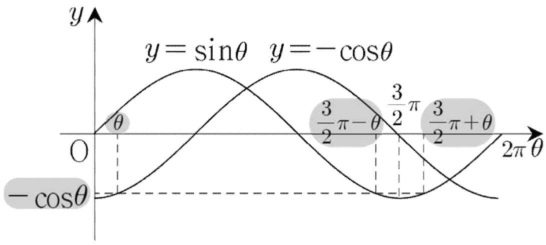
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

그런데 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로

$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta,\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

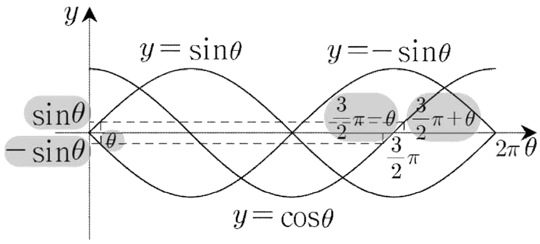
✪ 삼각함수의 성질 (그래프) (3)

다음과 같이 삼각함수의 그래프의 개형에서 아래의 공식들을 유도할 수 있다.



위의 그래프에서

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta,\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$$



위의 그래프에서

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta,\ \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$$

그런데 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cot\theta,\ \tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cot\theta$$

문제 30

p.30

다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin\frac{4}{3}\pi$　　(2) $\cos\frac{5}{6}\pi$　　(3) $\tan\frac{5}{4}\pi$

연습 31

p.30

다음 식을 간단히 하여라.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\sin(\pi-\theta)$$

삼각함수의 성질을 이용하면 임의의 크기의 각에 대한 삼각함수의 값을 $0°$에서 $90°$까지의 각에 대한 삼각함수의 값으로 나타낼 수 있다. (아래는 삼각함수표의 일부이다.)

각	sin	cos	tan
$51°$	0.7771	0.6293	1.2349
$52°$	0.7880	0.6157	1.2799
$53°$	0.7986	0.6018	1.3270

$$\begin{aligned}\sin 308° &= \sin(360° - 52°)\\ &= \sin(-52°)\\ &= -\sin 52°\end{aligned}$$

위의 삼각함수표에서 $\sin 52° = 0.7880$이므로 $\sin 308° = -0.7880$

※ 수능 수학 시험에서는 삼각함수표를 이용하여 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제되고 있지 않으므로, 위의 주제에 대한 예제는 생략합니다.

4 삼각함수의 활용

학습목표

- 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.

▶ 삼각함수의 활용

✪ 삼각함수의 그래프를 이용한 방법, 단위원을 이용한 방법 모두 중요하다. 두 방법 모두 손에 익혀둘 필요가 있다. 다시 말하면 어느 한쪽에도 치우치지 말아야 한다.

삼각함수를 포함한 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프나 단위원을 이용하여 풀 수 있다.

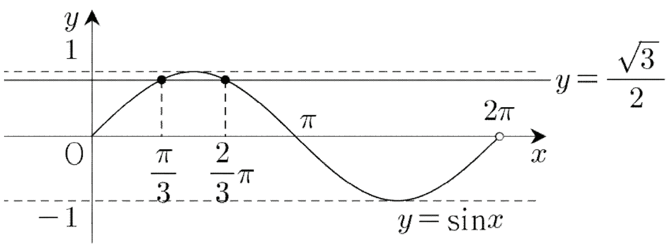
예제 9

방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

풀이

(풀이1)

주어진 방정식의 해는 곡선 $y=\sin x(0\le x<2\pi)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.



따라서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

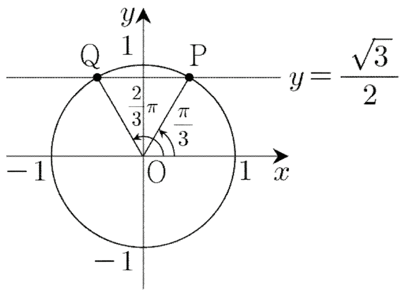
(풀이2)

다음의 필요충분조건을 생각하자.

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Leftrightarrow$ 단위원에서 y좌표가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 점이 나타내는 각의 크기

아래 그림과 같이 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$과 단위원의 두 교점을 P, Q라고 하면, 주어진 방정식의 해는 두 동경 OP와 OQ가 나타내는 각의 크기

와 같다.



따라서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

문제 32

p.30

다음 방정식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) $\sin x = -\frac{1}{2}$ (2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan x = \sqrt{3}$

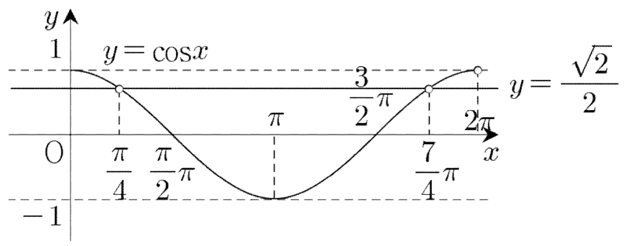
예제 10

부등식 $\cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

풀이

(풀이1)

주어진 부등식의 해는 곡선 $y = \cos x (0 \le x < 2\pi)$가 직선 $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.



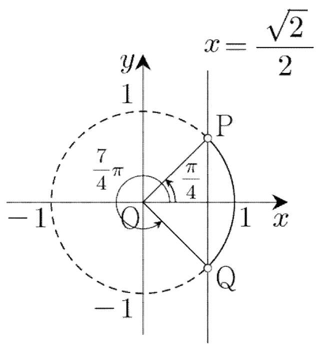
따라서 구하는 해는 $0 \le x < \dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{7}{4}\pi < x < 2\pi$

(풀이2)

다음의 필요충분조건을 생각하자.

$\cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow$ 단위원에서 x좌표가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$보다 큰 점이 나타내는 각의 범위

아래 그림과 같이 직선 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$와 단위원의 두 교점을 P, Q라고 하자.



두 동경 OP와 OQ가 나타내는 각의 크기는 각각 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{7}{4}\pi$이다.

따라서 구하는 해는 $0 \le x < \dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{7}{4}\pi < x < 2\pi$

답 $0 \le x < \dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{7}{4}\pi < x < 2\pi$

문제 33

p.31

다음 부등식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) $\sin x \le -\frac{1}{2}$ (2) $\cos x \le \frac{1}{2}$

(3) $\sqrt{3}\tan x > -1$

연습 34

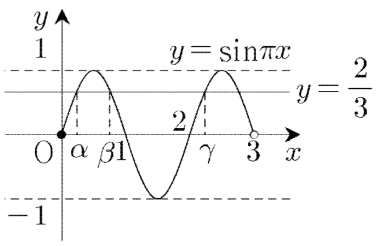
p.33

$0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $4\sin x \le -3$을 만족시키는 x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\tan\frac{\alpha+\beta}{4}$의 값을 구하여라.

연습 35

p.33

아래 그림처럼 함수 $f(x) = \sin\pi x(0 \le x < 3)$의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{3}$가 만나는 네 개의 교점 중에서 세 점의 x좌표를 각각 α, β, γ라고 하자. $f(\alpha+\beta+\gamma)$의 값을 구하여라.



7 초월함수/다항함수의 그래프

▸ 초월함수의 증가감소, 극대극소, 변곡점: 기본문제

초월함수의 증가감소, 극대극소, 변곡점에 대한 기본적인 문제들을 풀어보자. (4문제)

문제 1

p.153

다항함수 $f(x)$가 다음의 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$

(나) $f'(x)$는 증가함수이다.

양의 실수 전체의 집합에서 함수 $\dfrac{f(x)}{x}$가 증가함수임을 보이시오.

〈문제1〉
이 문제가 풀리지 않는다면 기본개편 편을 복습해야 한다.

문제 2

p.153

$3\sin\theta+4\cos\theta$가 최대 또는 최소가 되는 θ에 대하여 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$임을 증명하시오.

〈문제2〉
함수가 극값을 가질 때를 보이는 방법은 크게 두 가지이다.
❶ 도함수의 부호의 변화
❷ 이계도함수의 부호
이 문제를 풀 때, ❶, ❷를 모두 적용해보자. 그리고 어떤 방법이 더 실전적인지에 대하여 고민해보라. (만약 이 문제가 풀리지 않는다면 기본개념 편을 복습해야 한다.)

〈문제3〉
함수가 극값을 가질 때를 보이는 방법은 크게 두 가지이다.
❶ 도함수의 부호의 변화
❷ 이계도함수의 부호
이 문제를 풀 때, ❶, ❷를 모두 적용해보자. 그리고 어떤 방법이 더 실전적인지에 대하여 고민해보라. (만약 이 문제가 풀리지 않는다면 기본개념 편을 복습해야 한다.)

문제 3

p.154

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=a$에서 양의 극솟값을 갖는다. 이때, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 양의 극솟값을 가짐을 증명하시오.

〈문제4〉
만약 이 문제가 풀리지 않는다면 기본개편 편을 복습해야 한다.

문제 4

p.154

다음의 물음에 답하시오. (단, $ab\neq 0$)

(1) 함수 $f(x)=ax+b\sin x$의 그래프가 극점을 갖지 않을 조건을 구하시오.

(2) 함수 $f(x)=ax^2+b\cos x$의 그래프가 변곡점을 갖지 않을 조건을 구하시오.

▸ 초월함수의 그래프를 그리는 순서

초월함수의 그래프를 그리는 순서를 알아보자.

초월함수란? 초월함수는 다항함수의 사칙연산과 거듭제곱근 연산을 유한 번 적용해 정의할 수 없는 함수를 말한다. 대표적으로 지수함수, 로그함수, 삼각함수가 있다.

초월함수를 포함한 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같은 사항을 조사하고 종합하여 그린다.

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시) ❷ 대칭성과 주기 ❸ 좌표축과의 교점 ❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 ❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점 ❻ 점근선 $(\lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to a+} f(x),\ \lim_{x\to a-} f(x))$

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가질 때, 아래와 같은 사항을 조사해야 한다.

❹: 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때,

(1) $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(2) $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

(※ 이계도함수의 부호를 이용하여 항상 극점을 판정할 수 있는 것은 아니다. 이 경우에는 도함수의 부호의 변화로 극점을 판정해야 한다.)

❺: 곡선의 오목과 볼록

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서

(1) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록이다.

(2) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록이다.

❺: 변곡점

이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. 이때, $f''(a)$의 값이 존재하면 $f''(a)=0$이다.

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가질 때, 아래의 표가 성립한다.

	미분가능성	연속성
$f(x)$	○	○
$f'(x)$	○	○
$f''(x)$	알 수 없다.	알 수 없다.

▸ 대표적인 초월함수의 그래프 (빠르게 그리는 법)

대표적인 초월함수의 그래프를 그려보자.

• 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$의 그래프

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

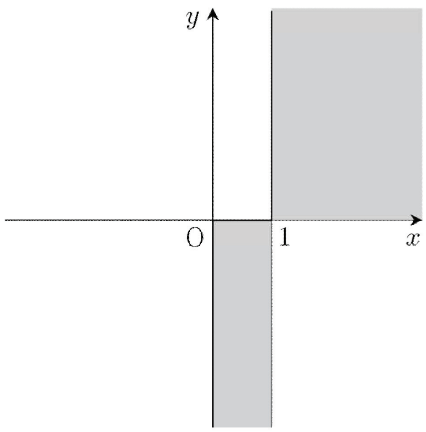
진수의 조건에 의하여 $x>0$이고, (분모)$\neq 0$에서 $x\neq 0$이므로

함수 $f(x)$의 정의역은 양의 실수의 전체의 집합이다.

$0<x<1$일 때, $\ln x<0$이므로 $f(x)<0$

$x>1$일 때, $\ln x>0$이므로 $f(x)>0$

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 $(1,\ 0)$을 반드시 지나야 한다.

$(\because f(1)>0,\ f(1)<0$ 모두 가능하지 않다.$)$

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(1)=0$이므로 x축과의 교점은 $(1,\ 0)$이다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=e$

$f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=e^{\frac{3}{2}}$

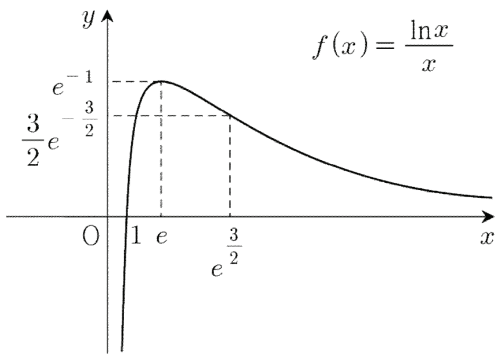
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	e^{-1} 극대	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ 변곡점	↘

❻ 점근선

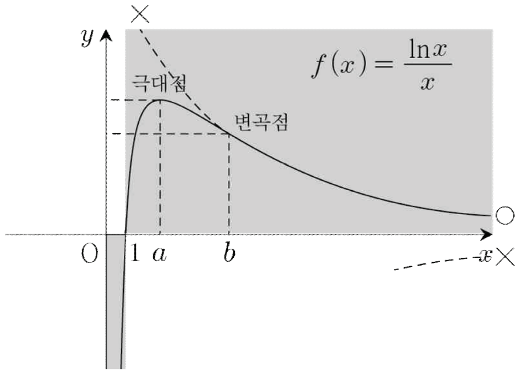
$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 x축과 y축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



● 위의 그래프를 빠르게 그려보자.

로그의 진수의 조건과 (분모)$\neq 0$으로 정의역을, $\ln x$(분자)와 x(분모)가 갖는 값의 범위(부호)로 치역을 찾아서 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다. (아래 그림에서 색칠된 영역)



$x\to 0+$일 때, $\ln x\to -\infty$이므로

$f(x)$는 $\dfrac{-\infty}{0+}=-\infty\cdot\infty=-\infty$이다. 그러므로 $x\to 0+$일 때, y축은 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다.

$x\to\infty$일 때, 직선 $y=x$가 곡선 $y=\ln x$보다 비교하기 힘들 정도로 빠르게 증가하므로 $f(x)\to 0(f(x)>0)$이다. 그러므로 $x\to\infty$일 때, x축은 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이어야 한다. 만약 $x\to\infty$일 때, 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록이면 x축을 점근선으로 가지면서 제1사분면에 그려질 수 없다. ($\because$ 귀류법)

만약 구간 $(1,\ \infty)$에서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록이면 이 곡선은 점 $(1,\ 0)$을 지날 수 없다. 따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록인 구간 $(1,\ b)$가 존재한다. ($\because$ 귀류법)

이때, 점 $(b,\ f(b))$는 변곡점이다. 그리고 구간 $(0,\ b)$에서 곡선 $y=f(x)$가 극대점을 가짐을 알 수 있다. (왜냐하면 함숫값이 0에서 커졌다가, 다시 0에 한없이 가까워져야하기 때문이다.)

이 점을 $(a, f(a))$라고 하자. (단, $0<a<b$)

극점과 변곡점이 각각 1개씩인지는 도함수와 이계도함수를 구해야 알 수 있다.

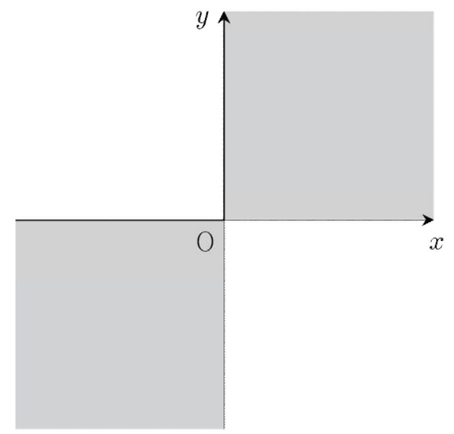
몇 가지를 정리해보면.

❶ ‘곡선이 그려지는 사분면(또는 어떤 영역)’ 과 ‘점근선’ 을 알면 곡선의 볼록(,)을 판단할 수 있다.
❷ ‘곡선이 지나는 점’ 과 ‘점근선’ 으로 극점과 변곡점의 존재 유무를 판단할 수도 있다. 이때, 극점과 변곡점의 개수와 좌표를 정확하게 알기 위해서는 도함수와 이계도함수를 이용해야 한다.
처음 보는 함수의 경우에는 도함수와 이계도함수를 이용하여 정확하게 그림을 그려야 한다. 하지만 같은 함수의 그래프를 여러 번 그려서 익숙해지면 위와 같이 계산과정을 생략하고 빠르게 그리는 것이 가능해진다.

• 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$의 그래프

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
$x>0$일 때, $f(x)>0$, $x<0$일 때, $f(x)<0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지나야 한다.

❷ 대칭성과 주기

임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

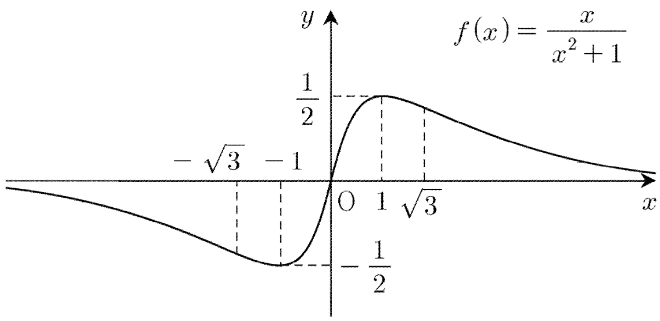
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 변곡점	↘	$-\frac{1}{2}$ 극소	↗	0 변곡점	↗	$\frac{1}{2}$ 극대	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 변곡점	↘

❻ 점근선

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이 함수의 그래프를 빠르게 그리는 법에 대해서는 기본개념 편에서 설명하였다.

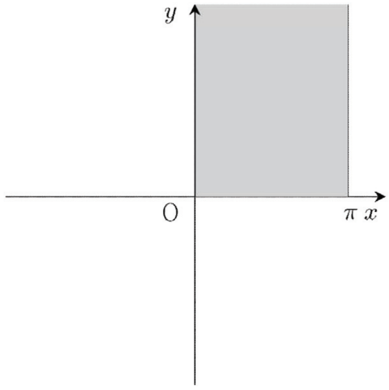
- 함수 $f(x)=x\sin x$의 그래프 (단, $0\leq x\leq\pi$)

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 $0\leq x\leq\pi$이다.

$0\leq x\leq\pi$일 때, $f(x)\geq0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

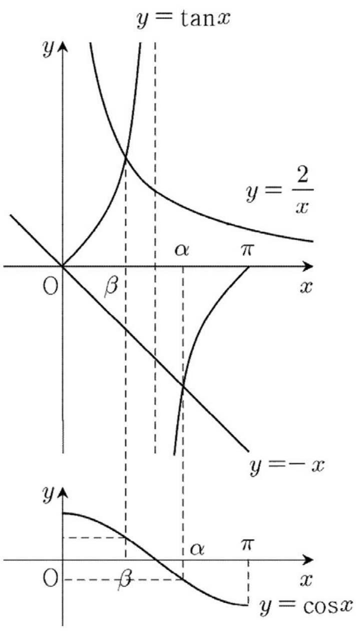
(만약 정의역이 실수 전체의 집합이면 y축 대칭이다.)

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$, $f(\pi)=0$이므로 두 점 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ 0)$을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점



$f'(x)=\sin x+x\cos x=\cos x(\tan x-(-x))$이므로

$f'(x)=0$을 만족시키는 실근을 α라고 하면 $\tan\alpha=-\alpha$이다.

$x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에 극댓값을 갖는다.

$f''(x)=2\cos x-x\sin x=x\cos x\left(\dfrac{2}{x}-\tan x\right)$이므로

$f''(x)=0$을 만족시키는 실근을 β라고 하면 $\tan\beta=\dfrac{2}{\beta}$이다.

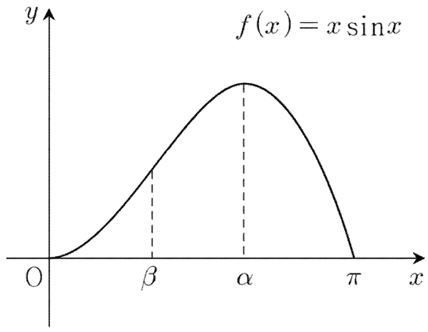
$x=\beta$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

점 $(\beta,\ f(\beta))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. 구간 $(0,\ \beta)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고, 구간 $(\beta,\ \pi)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.

❻ 점근선

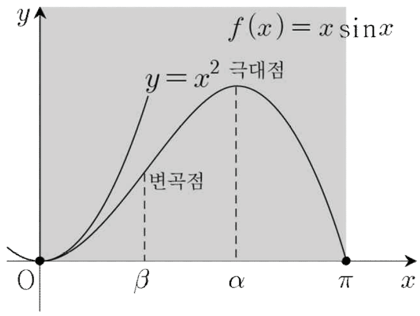
함수 $f(x)$의 그래프는 점근선을 갖지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



● **위의 그래프를 빠르게 그려보자.**

구간 $[0,\ \pi]$에서 x와 $\sin x$가 갖는 값의 범위(부호)로 치역을 찾아서 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다. (아래 그림에서 색칠된 영역)



$x \to 0+$일 때, $x \approx \sin x$이므로 $f(x) \approx x^2$이다.

즉, 구간 $(-h,\ h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^2$에 한없이 가까워진다. (단, h는 충분히 작은 양수) 이때, 구간 $(-h,\ h)$에서 곡선 $y=x^2$이 아래로 볼록이므로 곡선 $y=f(x)$도 아래로 볼록임을 알 수 있다.

그런데 곡선 $y=f(x)$가 점 $(\pi,\ 0)$을 지나므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 증가했다가 감소해야 한다.

따라서 이 구간에서 함수 $f(x)$는 극대점을 가져야 한다. 이때, 극대점의 x좌표를 α라고 하자. (롤의 정리에 의하여 $f'(\alpha)=0$인 $x=\alpha$가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재함을 알 수 있기도 하다.)

구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0,\ \alpha)$에서 변곡점을 가져야 한다. 이때, 변곡점의 x좌표를 β라고 하자. (단, $0<\beta<\alpha$)

극점과 변곡점이 각각 1개씩인지는 도함수와 이계도함수를 구해야 알 수 있다.

문제 5

p.155

아래 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $f(x)=e^{-x^2}$
(2) $f(x)=xe^{-x}$
(3) $f(x)=x^2e^{-x}$
(4) $f(x)=xe^{x}$
(5) $f(x)=x^2e^{x}$
(6) $f(x)=e^{-x}\sin x \ (0\le x\le 2\pi)$
(7) $f(x)=x+\sin x \ (0\le x\le 2\pi)$
(8) $f(x)=x+2\cos x \ (0\le x\le 2\pi)$
(9) $f(x)=\sin x+\cos x \ (0\le x\le 2\pi)$
(10) $f(x)=x\sin x+\cos x \ (0\le x\le 2\pi)$
(11) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$
(12) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$
(13) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$
(14) $f(x)=x^2-3x-\dfrac{1}{x}$
(15) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$
(16) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$
(17) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
(18) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
(19) $f(x)=\ln(x^2+1)$
(20) $f(x)=(\ln x)^2$
(21) $f(x)=x-\sqrt{x+1}$
(22) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$
(23) $f(x)=x+\ln x$
(24) $f(x)=x-\ln x$
(25) $f(x)=x\ln x$
(26) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$
(27) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$
(28) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

- 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 다음의 두 관점에서 그려보자.

❶ 교과서 본문의 '그래프의 개형을 그리는 방법' 을 적용한다. 즉, 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프를 그린다.

❷ 곡선이 지나는 영역/정점, 곡선의 점근선/한없이 가까워지는 곡선, 롤의 정리/평균값 정리, 사칙연산($f\pm g$, $f\times g$, $\dfrac{f}{g}$), … 등을 이용하여 극점과 변곡점을 찾고, 함수의 그래프의 개형을 완성한다.

(❷에 의한 빠른 풀이는 [참고]에 설명해두었다.)

❶이 익숙해지면 ❷로 빠르게 곡선을 그릴 수 있어야 한다. 머릿속에 곡선이 자연스럽게 그려질 때까지 충분히 연습하자!

〈문제6〉
함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 도함수와 이계도함수를 이용하여 그리기 전에 추측해보자. (이에 대해서는 [참고]에서 설명하였다.)

문제 6

p.186

아래 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $f(x)=x^n(x-1)$ (단, n은 2 이상의 자연수)

(2) $f(x)=x^ne^{-x}$ (단, n은 2 이상의 자연수)

(3) $f(x)=x^ne^x$ (단, n은 2 이상의 자연수)

〈문제7〉
함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 도함수와 이계도함수를 이용하여 그리기 전에 추측해보자. (이에 대해서는 [풀이]에서 설명하였다.)

문제 7

p.189

함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$의 그래프를 그리시오. (단, a, b는 상수)

▸ 초월함수의 증가감소, 극대극소, 변곡점: 대수 vs 기하

초월함수의 극대극소, 변곡점에 대한 문제를 풀어보자.

〈문제8〉
이 문제는 대수적인 풀이와 기하학적 풀이가 모두 가능하다. 시험장에서는 후자의 방법, 즉 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 가장 간단한 그래프의 개형을 그려서 푸는 것이 실전적이다. 다만 문제에서 주어진 조건과 필요충분조건을 이루는 그래프의 개형을 그리지 못한다면 실수할 가능성이 높기 때문에 대수적인 방법으로 증명해야 안심이 된다. ([풀이]: 대수적인 풀이, [참고1]: 기하학적 풀이)

문제 8

p.191

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점](2005-가형28 변형)

ㄱ. $f'(-x)=f'(x)$

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$

ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=a(a\neq 0)$에서 극댓값을 가지면 $f'(x)$는 $x=-a$에서 극솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〈문제9〉
이 문제는 대수적인 풀이와 기하학적 풀이가 모두 가능하다. 시험장에서는 후자의 방법, 즉 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 가장 간단한 그래프의 개형을 그려서 푸는 것이 실전적이다. 다만 문제에서 주어진 조건과 필요충분조건을 이루는 그래프의 개형을 그리지 못한다면 실수할 가능성이 높기 때문에 대수적인 방법으로 증명해야 안심이 된다. ([풀이]: 대수적인 풀이, [참고]: 기하학적 풀이)

문제 9

p.192

$x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점](2010(6)-가형14)

ㄱ. 함수 $|f(x)|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(|x|)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)-x^2|x|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

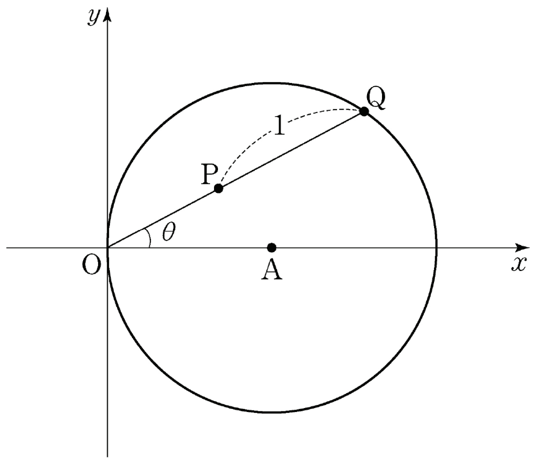
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

〈문제10〉
함수가 극값을 가짐을 보이는 방법은 크게 두 가지이다.
❶ 도함수의 부호의 변화
❷ 이계도함수의 부호
이 문제를 풀 때, ❶, ❷를 모두 적용해보자. 그리고 어떤 방법이 더 실전적인지에 대하여 고민해보라. ([풀이1]: ❷에 의한 풀이, [참고3]: ❶에 의한 풀이) [참고3]을 이해될 때까지 여러 번 정독하여 합성함수의 극대극소의 판단에 대한 이해를 높이자.

문제 10

p.194

그림과 같이 좌표평면에 점 A$(1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점 Q에 대하여 $\angle \mathrm{AOQ}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$라 할 때, 선분 OQ 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$인 점 P를 정한다. 점 P의 y좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta=\frac{a+\sqrt{b}}{8}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.) [4점](2018(6)−가형26)



〈문제11〉
이 문제는 대수적인 풀이와 기하학적 풀이가 모두 가능하다. 시험장에서는 후자의 방법, 즉 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 가장 간단한 그래프의 개형을 그려서 푸는 것이 실전적이다.(이 문제의 경우 합성함수의 그래프의 개형을 그려야 한다.) 다만 문제에서 주어진 조건과 필요충분조건을 이루는 그래프의 개형을 그리지 못한다면 실수할 가능성이 높기 때문에 대수적인 방법으로 증명해야 안심이 된다. ([풀이]: 대수적인 풀이, [참고]: 기하학적 풀이)

문제 11

p.197

다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점](2011(9)−가형29)

ㄱ. $g'(3)=-1$

ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〈문제12〉
함수의 그래프의 개형을 그리는 순서에 대한 문제이다. 이 문제에서 주어진 조건 (가), (나), (다)는 모두 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 연관되어 있다. 또한 참, 거짓을 판단해야 하는 ㄱ, ㄴ, ㄷ도 마찬가지이다. 따라서 이 문제에서 주어진 조건은 '그래프의 개형을 그리는 순서' 의 관점에서 해석해야 한다.(해설집의 [참고3]에 이를 정리해두었다.) 그리고 이 문제를 풀고 나서 미적분에서의 귀류법의 중요성을 다시금 상기하자.

문제 12

p.199

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점](2017(6)−가형21)

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수능
수학
독본

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

해설 목차

〈 기본개념 편 〉

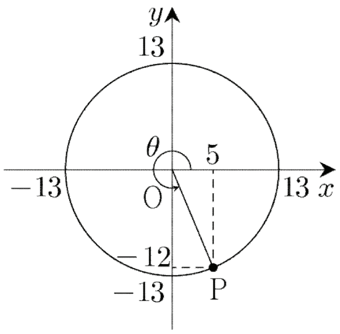
〈 실전이론 편 〉

2 삼각함수

8

[풀이]

$\overline{OP}=13$이므로



$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$,

$\csc\theta=-\frac{13}{12}$, $\sec\theta=\frac{13}{5}$, $\cot\theta=-\frac{5}{12}$

답 풀이참조

9

[풀이]

(1) 점 P의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$,

$\csc\theta=-\sqrt{2}$, $\sec\theta=\sqrt{2}$, $\cot\theta=-1$

(2) 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$,

$\csc\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\theta=-2$, $\cot\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 풀이참조

10

[풀이]

(1) 120°는 제2사분면의 각이므로

$\sin 120^\circ>0$, $\cos 120^\circ<0$, $\tan 120^\circ<0$

(2) $400^\circ=360^\circ\times 1+40^\circ$는 제1사분면의 각이므로

$\sin 400^\circ>0$, $\cos 400^\circ>0$, $\tan 400^\circ>0$

(3) $\frac{5}{3}\pi=2\pi-\frac{1}{3}\pi$는 제4사분면의 각이므로

$\sin\frac{5}{3}\pi<0$, $\cos\frac{5}{3}\pi>0$, $\tan\frac{5}{3}\pi<0$

(4) $-\frac{3}{5}\pi=-\pi+\frac{2}{5}\pi$는 제3사분면의 각이므로

$\sin\left(-\frac{3}{5}\pi\right)<0$, $\cos\left(-\frac{3}{5}\pi\right)<0$,

$\tan\left(-\frac{3}{5}\pi\right)>0$

답 풀이참조

11

[풀이]

(1) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이면 θ는 제2사분면의 각이고,

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이면 θ는 제4사분면의 각이다.

(2) $\sec\theta>0$, $\tan\theta>0$이면 θ는 제1사분면의 각이고,

$\sec\theta<0$, $\tan\theta<0$이면 θ는 제2사분면의 각이다.

답 풀이참조

12

[풀이]

밑변의 길이가 12, 높이가 5인 직각삼각형의 빗변의 길이는 13이므로

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{12}{13}}=-\frac{13}{12}$,

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{-\frac{5}{13}}=-\frac{13}{5}$

답 $\sec\theta = -\frac{13}{12}$, $\csc\theta = -\frac{13}{5}$

13

[풀이]

(1) 문제에서 주어진 등식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{2}$

이때 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

(2) 곱셈공식에 의하여

$(\sin\theta + \cos\theta)^2$

$= (\sin\theta - \cos\theta)^2 + 4\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{2}$

$\sin\theta + \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

이때, θ가 제1사분면의 각이면 $\frac{\sqrt{6}}{2}$이고,

θ가 제3사분면의 각이면 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$이다.

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

14

[풀이]

(1) $\frac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta} = \frac{\frac{1}{\tan^2\theta}}{1+\frac{1}{\tan^2\theta}} = \frac{1}{\tan^2\theta + 1}$

$= \frac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$

(2) $\frac{1}{\csc\theta - \cot\theta} + \frac{1}{\csc\theta + \cot\theta}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta) + \sin\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$= \frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

답 (1) $\cos^2\theta$ (2) $2\csc\theta$

15

[풀이]

(1) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} = 2$

(2) θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$에서 $\sin\theta + \cos\theta < 0$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$에서 $\sin\theta + \cos\theta = -\sqrt{2}$

$\csc\theta + \sec\theta = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = -\sqrt{2} \cdot 2 = -2\sqrt{2}$

답 (1) 2 (2) $-2\sqrt{2}$

3 삼각함수의 그래프

16

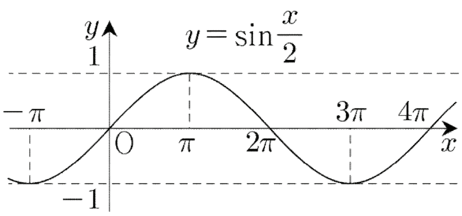
[풀이]

(1) $-1 \le \sin\frac{x}{2} \le 1$이므로 치역은

$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

또 $\sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = \sin\frac{1}{2}(x+4\pi)$

이므로 주기는 4π이고, $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프는 다음과 같다.

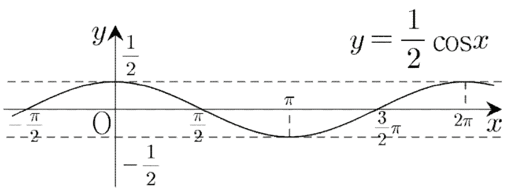


(2) $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\cos x \le \frac{1}{2}$이므로

치역은 $\left\{y \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\right\}$이다.

또 $\frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\cos(x+2\pi)$이므로

주기는 2π이고, $y=\frac{1}{2}\cos x$의 그래프는 다음과 같다.



답 풀이 참조

17

[풀이]

조건 (가)에 의하여

$a+c=6$, $-a+c=2$

연립방정식을 풀면

$a=2$, $c=4$

조건 (나)에 의하여

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$에서 $b=6$

$\therefore\ abc=48$

답 48

18

[풀이]

문제에서 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에 의하여

함수 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 1이고,

함수 $f(x)$의 주기는 $4\pi(=3\pi-(-\pi))$이다.

최댓값: $a+c=5$

최솟값: $-a+c=1$

주기: $\frac{2\pi}{b}=4\pi$

풀면

$a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $c=3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+3$

$\therefore\ f\left(\frac{8}{3}\pi\right)=2\cos\frac{5}{6}\pi+3$

$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3=3-\sqrt{3}$

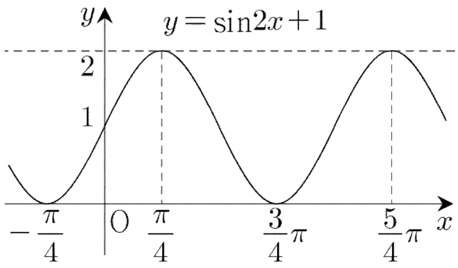
답 $3-\sqrt{3}$

19

[풀이]

(1) 함수 $y=\sin 2x+1$의

그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다.



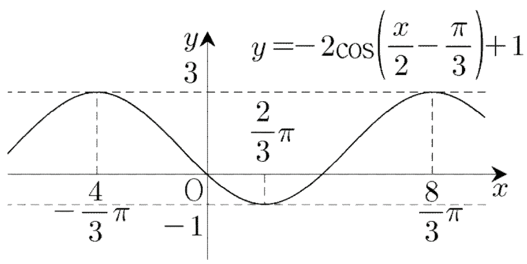
따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

(2) 함수 $y=-2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+1$

$=-2\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+1$의

그래프는 $y=-2\cos\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로

$\frac{2}{3}\pi$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다.



따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

답 풀이 참조

20

[풀이]

(1) $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$f(x)=1-\sin^2 x-2\sin x$

$\sin x=t(0\le t\le 1)$로 두면

$g(t)=1-t^2-2t=-(t+1)^2+2$

($\leftarrow g(t)=f(x)$로 둔 것이다.)

이제 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

이차함수 $g(t)$는 $t=0$일 때, 최댓값 1을 갖고,

$t=1$일 때, 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 구하는 값은 -1이다.

(2) 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

이차함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때, 최댓값 2를 갖고,

$t=1$일 때, 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 구하는 값은 0이다.

답 (1) -1 (2) 0

21

[풀이]

$\cos\theta=t(-1\le t\le 1)$로 두면 주어진 부등식은

$1-t^2-4t\le k$ ($\because \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$)

정리하면

$-(t+2)^2+5\le k$ $\cdots(*)$

구간 $[-1,\ 1]$에서 이차함수

$y=-(t+2)^2+5$는 $t=-1$일 때 최댓값 4를 가지므로 부등식 $(*)$이 구간 $[-1,\ 1]$에서 항상 성립하기 위한 k의 값의 범위는

$\therefore\ k\ge 4$

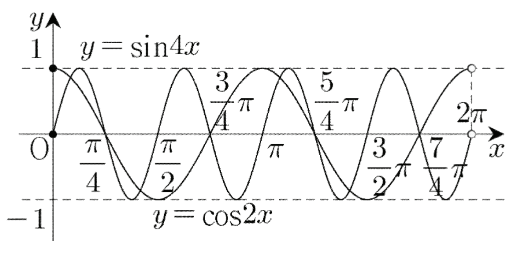
답 $k\ge 4$

22

[풀이]

구간 $[0,\ 2\pi)$에서 두 함수 $y=\sin 4x$,

$y=\cos 2x$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



구간 $[0,\ 2\pi)$에서 두 곡선 $y=\sin 4x$,

$y=\cos 2x$의 교점의 개수가 8이므로 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

답 8

23

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 정리하면

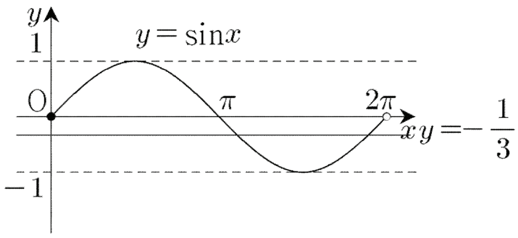
$\sin(nx) = -\frac{1}{3}$

a_n은 구간 $[0,\ 2\pi)$에서

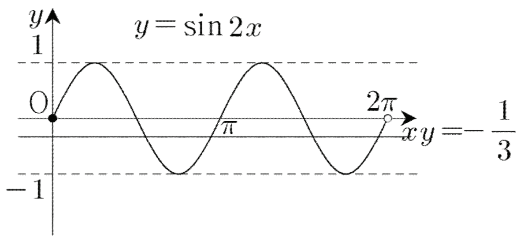
곡선 $y = \sin(nx)$와 직선 $y = -\frac{1}{3}$의 교점의 개수와 같다.

곡선 $y = \sin(nx)$의 주기는 $\frac{2\pi}{n}$이다.

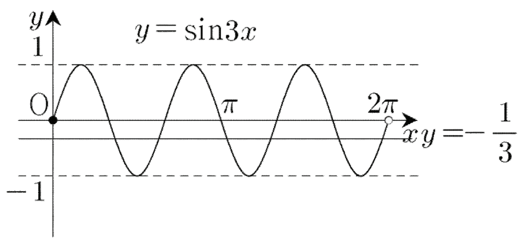
$n = 1$일 때, 아래 그림처럼 $a_1 = 2$



$n = 2$일 때, 아래 그림처럼 $a_2 = 4$



$n = 3$일 때, 아래 그림처럼 $a_3 = 6$



⋮

일반항 a_n을 다음과 같이 추론할 수 있다.

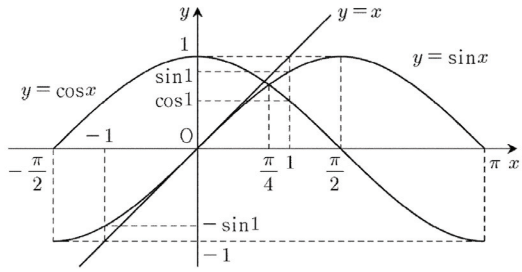
$a_n = 2n$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110$

답 110

24

[풀이]



$0 \le x \le \pi$일 때, $-1 \le \cos x \le 1$이므로

$-\sin 1 \le f(x) \le \sin 1$에서

$M_f = \sin 1,\ m_f = -\sin 1$

$0 \le x \le \pi$일 때, $0 \le \sin x \le 1$이므로

$\cos 1 \le g(x) \le 1$에서 $M_g = 1,\ m_g = \cos 1$

위의 그림에서

$\therefore\ m_f < m_g < M_f < M_g$

답 $m_f < m_g < M_f < M_g$

25

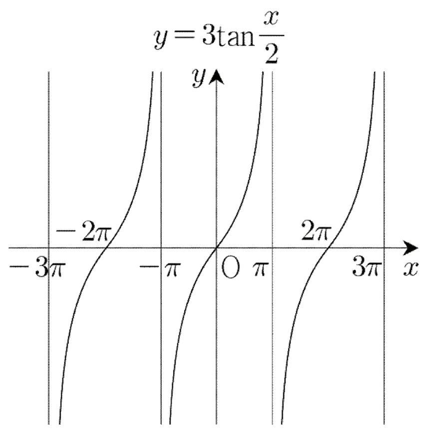
[풀이]

(1) $3\tan\frac{x}{2} = 3\tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = 3\tan\frac{1}{2}(x + 2\pi)$

따라서 주기는 2π이고, 점근선의 방정식은

$x = (2n - 1)\pi$(단, n은 정수)이며,

$y = 3\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 아래 그림과 같다.



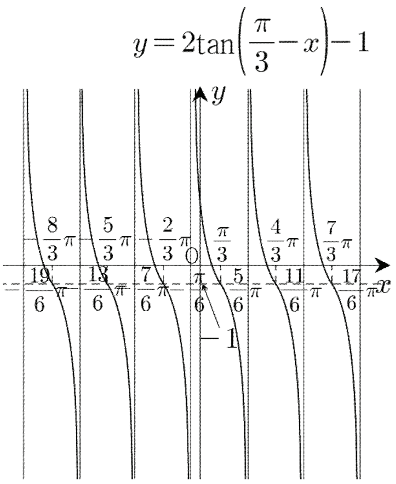
(2) $-2\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

$= -2\tan\left(x - \frac{\pi}{3} + \pi\right) - 1$

따라서 주기는 π이고, 점근선의 방정식은

$x = n\pi - \frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)이며,

$y = 2\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1$의 그래프는 아래 그림과 같다.



답 풀이 참조

26

[풀이]

$\tan x = t$, 주어진 함수를 $g(t)$로 두면

$g(t) = 4t + 1 + t^2 - 3 = (t+2)^2 - 6$

(단, $t \geq 0$)

$\left(\because \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x\right)$

구간 $[0, \infty)$에서 이차함수 $g(t)$의 최솟값은

$g(0) = -2$이다.

답 -2

27

[풀이]

(1) $\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right) = \sin\left(2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\frac{9}{4}\pi = \cos\left(2\pi \times 1 + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan\frac{13}{6}\pi$

$= \tan\left(2\pi \times 1 + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

28

[풀이]

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$

$= \cos\frac{13}{6}\pi = \cos\left(2\pi \times 1 + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -\tan\frac{9}{4}\pi$

$= -\tan\left(2\pi \times 1 + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

답 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) -1

29

[풀이]

(1) $\sin\frac{5}{6}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(2) $\cos\frac{3}{4}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan\frac{2}{3}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

30

[풀이]

(1) $\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

답 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 1

31

[풀이]

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\sin(\pi-\theta)$

$=\sin\theta(-\cos\theta)+\cos\theta\sin\theta=0$

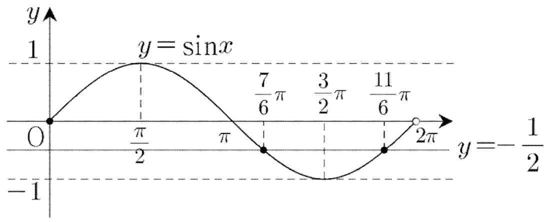
답 0

4 삼각함수의 활용

32

[풀이1]

(1)



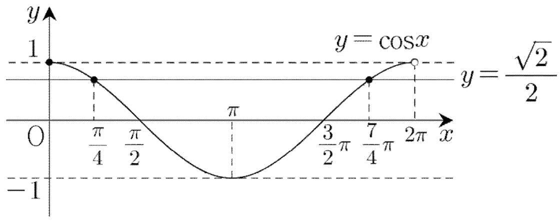
주어진 방정식의 해는 $y=\sin x$

$(0\leq x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의

x좌표와 같다. 따라서 구하는 해는

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(2)



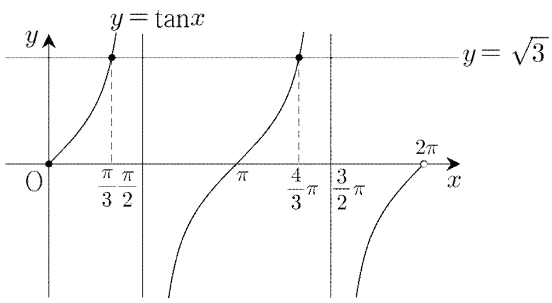
주어진 방정식의 해는 $y=\cos x$

$(0\leq x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의

x좌표와 같다. 따라서 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(3)



주어진 방정식의 해는 $y=\tan x$

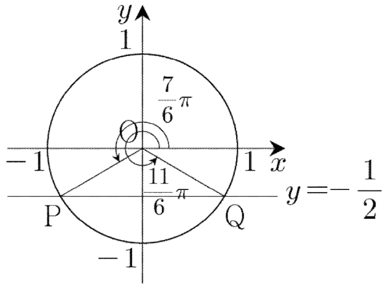
$(0 \le x < 2\pi)$의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 구하는 해는

$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

답 (1) $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$ (2) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$ (3) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

[풀이2]

(1)

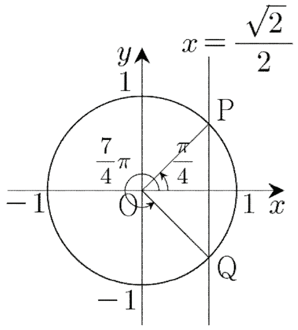


위의 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 단위원의 교점을 P, Q라고 하면, 주어진 방정식의 해는 동경 OP와 OQ가 나타내는 각의 크기와 같다.

따라서 구하는 해는

$x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(2)

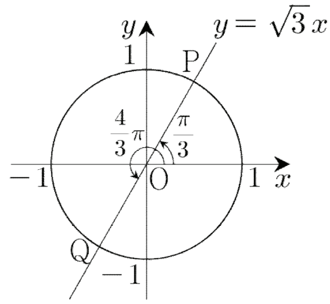


위의 그림과 같이 직선 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$과 단위원의 교점을 P, Q라고 하면, 주어진 방정식의 해는 동경 OP와 OQ가 나타내는 각의 크기와 같다.

따라서 구하는 해는

$x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

(3)



위의 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$과 단위원의 교점을 P, Q라고 하면, 주어진 방정식의 해는 동경 OP와 OQ가 나타내는 각의 크기와 같다.

따라서 구하는 해는

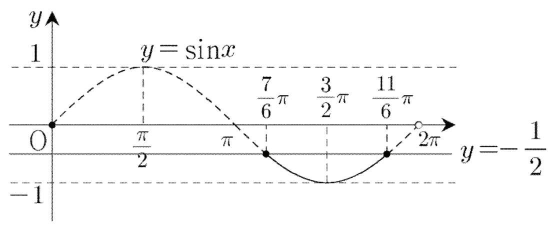
$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

답 (1) $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$ (2) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$ (3) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

33

[풀이1]

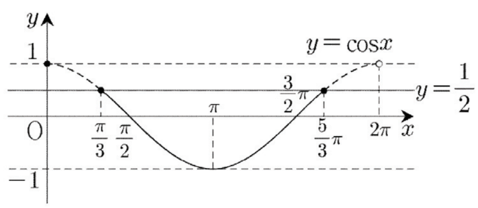
(1)



주어진 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$ $(0 \le x < 2\pi)$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 만나거나, 이 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다. 따라서 구하는 해는

$\frac{7}{6}\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi$

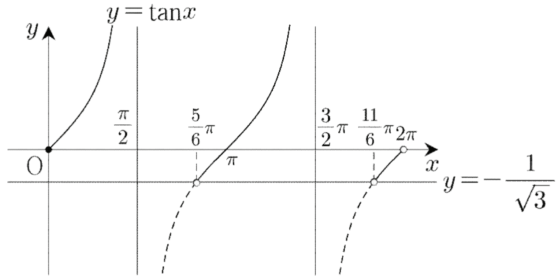
(2)



주어진 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나, 이 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다. 따라서 구하는 해는

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$

(3)



주어진 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다. 따라서 구하는 해는

$0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

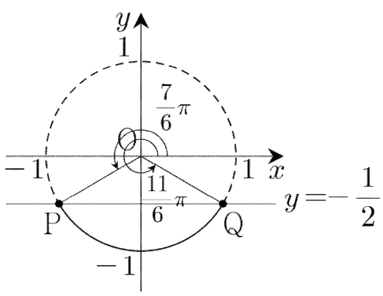
답 (1) $\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$

(3) $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

[풀이2]

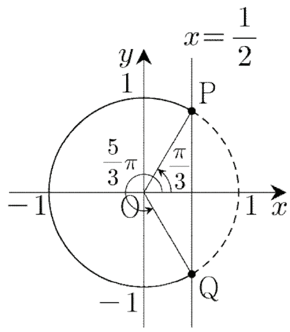
(1)



위의 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 단위원의 교점을 P, Q라고 하면, 주어진 부등식의 해는

$\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$

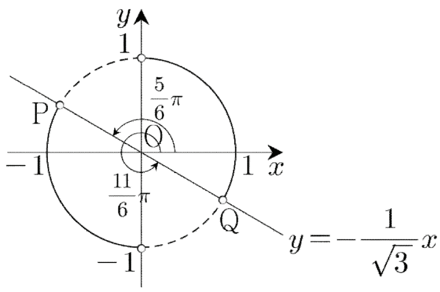
(2)



위의 그림과 같이 직선 $x=\frac{1}{2}$과 단위원의 교점을 P, Q라고 하면, 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$

(3)



위의 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$과 단위원의 교점을 P, Q라고 하면, 주어진 부등식의 해는

$0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

답 (1) $\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$

(3) $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

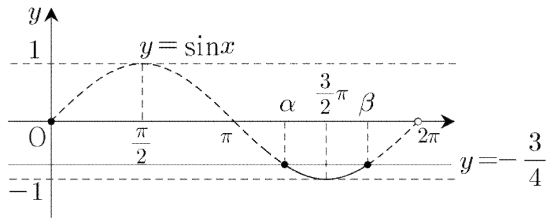
또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

34

[풀이]

주어진 부등식을 정리하면

$\sin x \le -\frac{3}{4}$



주어진 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$ $(0 \le x < 2\pi)$의 그래프가 직선 $y=-\frac{3}{4}$와 만나거나 이 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다. 즉, $\alpha \le x \le \beta$이다.

곡선 $y=\sin x$는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ \tan\frac{\alpha+\beta}{4}=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$

답 -1

35

[풀이]

함수 $y=\sin\pi x$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$에서 $\alpha+\beta=1$

$\therefore\ f(\alpha+\beta+\gamma)=f(1+\gamma)=\sin(\pi+\pi\gamma)$

$=-\sin\pi\gamma=-\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

II 삼각함수

❷ 삼각함수의 미분

1 삼각함수의 덧셈정리

36

[풀이]

(1) $\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$=\cos60^\circ\cos45^\circ-\sin60^\circ\sin45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

답 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

37

[풀이]

α는 제2사분면의 각, β는 제4사분면의 각이므로

$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(1) 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}-\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\frac{1-8\sqrt{3}}{15}$

(2) 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{15}$

Ⅲ 미분법

7 초월함수/다항함수의 그래프

01

[풀이]

함수 $\dfrac{f(x)}{x}$의 도함수는

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\left(=\dfrac{g(x)}{x^2}\right)$

$g(x)=xf'(x)-f(x)$로 두자.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=xf''(x)$

임의의 양의 실수 x에 대하여

$g'(x)=xf''(x)\ge 0$

($\because$ 조건 (나)에서 $f''(x)\ge 0$)

이므로 함수 $g(x)$는 증가함수이다.

그런데 $g(0)=0$($\because$ 조건(가))이므로

양의 실수 전체의 집합에서

$g(x)>0$, 즉 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'>0$

따라서 양의 실수 전체의 집합에서 함수 $\dfrac{f(x)}{x}$는 증가함수이다.

02

[풀이]

〈증명〉

$f(\theta)=3\sin\theta+4\cos\theta$로 두자.

함수 $f(\theta)$의 도함수는

$f'(\theta)=3\cos\theta-4\sin\theta=4\cos\theta\left(\dfrac{3}{4}-\tan\theta\right)$

방정식 $f'(\theta)=0$의 실근을 θ_0라고 하면

$\tan\theta_0=\dfrac{3}{4}$

(1) θ_0가 제1사분면의 각인 경우

$\theta=\theta_0$의 좌우에서 $\cos\theta>0$이고, $\dfrac{3}{4}-\tan\theta$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

$\theta=\theta_0$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다.

(2) θ_0가 제3사분면의 각인 경우

$\theta=\theta_0$의 좌우에서 $\cos\theta<0$이고, $\dfrac{3}{4}-\tan\theta$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

$\theta=\theta_0$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 극솟값(최솟값)을 갖는다.

(1), (2)에 의하여 문제에서 주어진 명제는 참이다.

[참고1]

함수 $f(\theta)$의 이계도함수는

$f''(\theta)=-3\sin\theta-4\cos\theta$

$\theta=\theta_0$일 때,

$\sin\theta_0=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta_0=\dfrac{4}{5}$($\theta_0$가 제1사분면의 각)

또는

$\sin\theta_0=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta_0=-\dfrac{4}{5}$($\theta_0$가 제3사분면의 각)

이므로

$f''(\theta_0)=-5<0$(θ_0가 제1사분면의 각)

$f''(\theta_0)=5>0$(θ_0가 제3사분면의 각)

θ_0가 제1사분면의 각일 때,

$f'(\theta)=0$, $f''(\theta_0)<0$이므로

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다.

θ_0가 제3사분면의 각일 때,

$f'(\theta)=0$, $f''(\theta_0)>0$이므로

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 극솟값(최솟값)을 갖는다.

[참고2]

일반적으로 $a\sin\theta+b\cos\theta$가 최대 또는 최소가 되는 θ에 대하여

$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$

이다. (단, $ab\ne 0$)

03

[풀이]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 이계도함수를 가지므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 미분가능하다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 양의 극솟값을 가지므로

$f(a)>0$, $g(a)>0$,

$f'(a)=g'(a)=0$,

$f''(a)=g''(a)>0$

$h(x)=f(x)g(x)$로 두자.

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

$h''(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$

$h(a)=f(a)g(a)>0$

$h'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)=0$,

$h''(a)=f''(a)g(a)+2f'(a)g'(a)+f(a)g''(a)$

$=f''(a)g(a)+f(a)g''(a)>0$

요컨대

$h(a)>0$, $h'(a)=0$, $h''(a)>0$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 양의 극솟값을 갖는다.

[참고]

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

왜냐하면 $x=a$의 좌우에서

$f(x)>0$, $g(x)>0$이고,

$f'(x)$, $g'(x)$의 부호가 각각 음에서 양으로 바뀌기 때문이다.

이때, 극솟값의 부호는

$f(a)g(a)>0(\because f(a)>0,\ g(a)>0)$

04

[풀이]

(1) 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a+b\cos x$

$=b\left\{\cos x-\left(-\dfrac{a}{b}\right)\right\}=$(곡선)$-$(직선)

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$\cos x=-\dfrac{a}{b}$

$\left|-\dfrac{a}{b}\right|\geq 1$ 즉, $\left|\dfrac{a}{b}\right|\geq 1$이면 함수 $f(x)$는 극점을 갖지 않는다.

$\left|\dfrac{a}{b}\right|<1$일 때, 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-\dfrac{a}{b}$의 교점은 무수히 많다. 이 중에서 한 교점의 x좌표를 x_0라고 하자.

$x=x_0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=x_0$에서 극값을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2ax-b\sin x$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=2a-b\cos x$

$=-b\left(\cos x-\dfrac{2a}{b}\right)=$(곡선)$-$(직선)

방정식 $f''(x)=0$을 풀면

$\cos x=\dfrac{2a}{b}$

$\left|\dfrac{2a}{b}\right|\geq 1$이면 함수 $f(x)$는 극점을 갖지 않는다.

$\left|\dfrac{2a}{b}\right|<1$일 때, 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=\dfrac{2a}{b}$의 교점은 무수히 많다. 이 중에서 한 교점의 x좌표를 x_0라고 하자.

$x=x_0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(x_0,\ f(x_0))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

답 (1) $\left|\dfrac{a}{b}\right|\geq 1$ (2) $\left|\dfrac{2a}{b}\right|\geq 1$

05

[풀이]

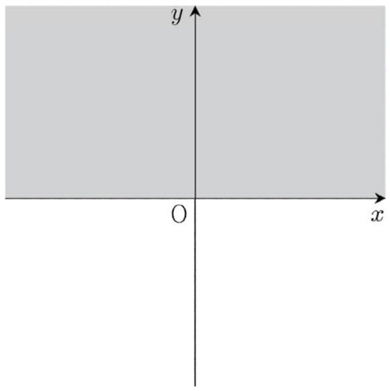
(1) $f(x)=e^{-x^2}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=1$이므로 $(0,\ 1)$을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=2e^{-x^2}(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

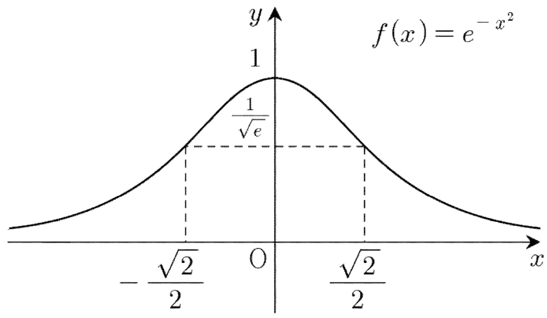
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	↗	1 극대	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	↘

❻ 점근선

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=e^{-x^2}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



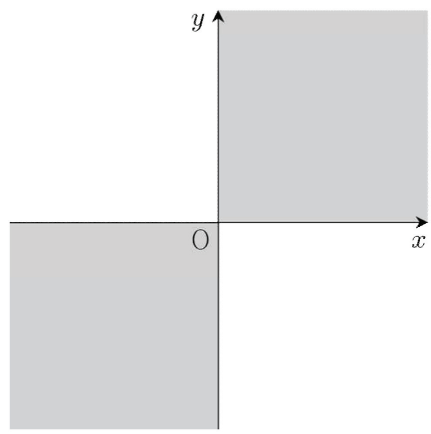
(2) $f(x)=xe^{-x}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$x>0$일 때, $f(x)>0$, $x<0$일 때, $f(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역을 지난다.



귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

$f''(x)=e^{-x}(x-2)$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=2$

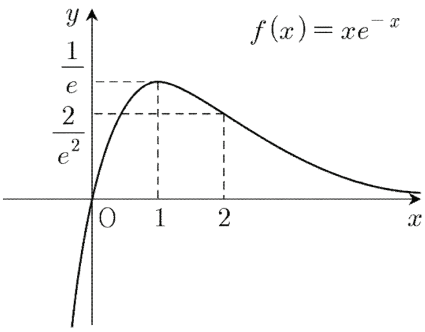
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$ 극대	↘	$\frac{2}{e^2}$ 변곡점	↘

❻ 점근선

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=xe^{-x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



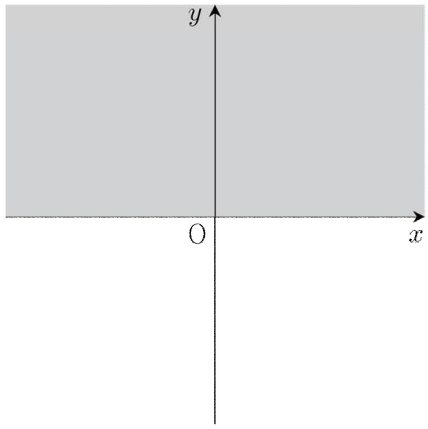
(3) $f(x)=x^2e^{-x}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로

함수 $f(x)$는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=e^{-x}x(2-x)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=2-\sqrt{2}$ 또는 $x=2+\sqrt{2}$

이때, $\alpha=2-\sqrt{2}$, $\beta=2+\sqrt{2}$로 두자.

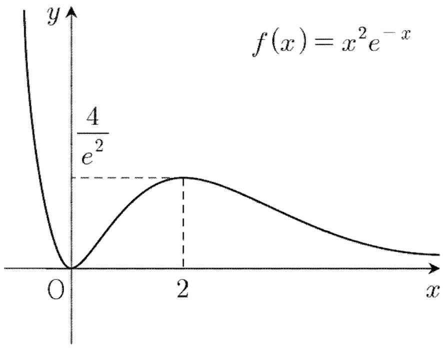
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	2	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	$f(\alpha)$ 변곡점	↗	$\frac{4}{e^2}$ 극대	↘	$f(\beta)$ 변곡점	↘

❻ 점근선

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



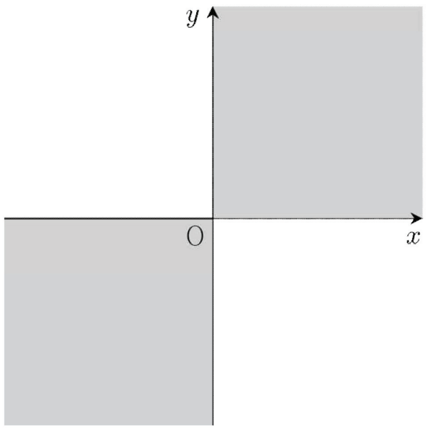
(4) $f(x)=xe^x$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$x>0$일 때, $f(x)>0$, $x<0$일 때, $f(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=e^x(x+1)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$

$f''(x)=e^x(x+2)$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=-2$

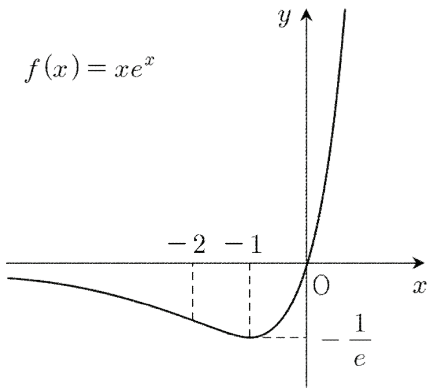
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e^2}$ 변곡점	↘	$-\frac{1}{e}$ 극소	↗

❻ 점근선

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=xe^x$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



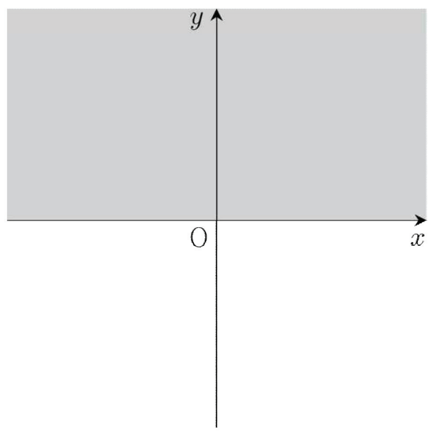
(5) $f(x)=x^2e^x$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로

함수 $f(x)$는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=e^x x(x+2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f''(x)=e^x(x^2+4x+2)$이므로

$f''(x)=0$에서

$x=-2-\sqrt{2}$ 또는 $x=-2+\sqrt{2}$

이때, $\alpha=-2-\sqrt{2}$, $\beta=-2+\sqrt{2}$로 두자.

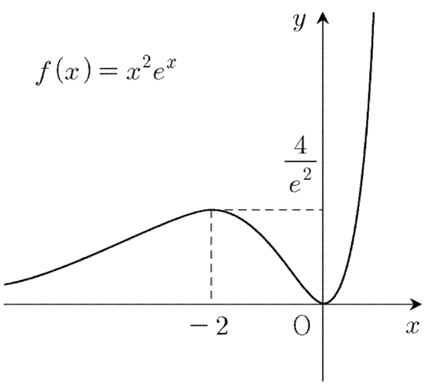
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	-2
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$ 변곡점	↗	$\frac{4}{e^2}$ 극대
$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$
$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-$	0	$+$	$+$	$+$
↘	$f(\beta)$ 변곡점	↘	0 극소	↗

❻ 점근선

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=x^2e^x$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(6) $f(x)=e^{-x}\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$

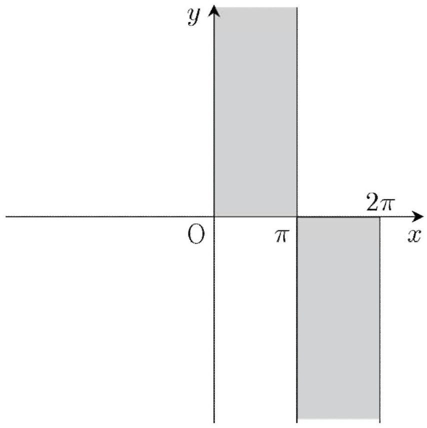
❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 $0\le x\le 2\pi$이다.

$0\le x\le \pi$일 때, $f(x)\ge 0$,

$\pi\le x\le 2\pi$일 때, $f(x)\le 0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(\pi,\ 0)$을 지난다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$, $f(\pi)=0$, $f(2\pi)=0$이므로

세 점 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ 0)$, $(2\pi,\ 0)$을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

$f''(x)=-2e^{-x}\cos x$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	극대	↘	변곡점	↘	극소	↗	변곡점	↗	0

극대점: $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$,

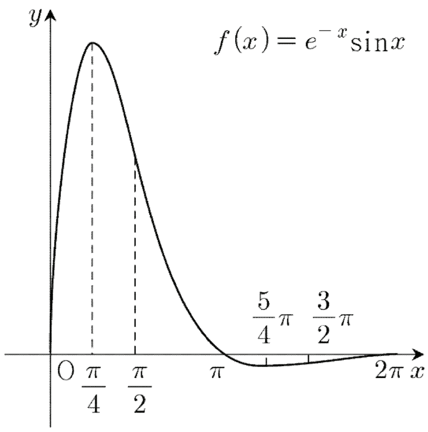
극소점: $\left(\frac{5\pi}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}\right)$

변곡점: $\left(\frac{\pi}{2},\ e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\ -e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$

❻ 점근선

함수 $f(x)$의 그래프는 점근선을 갖지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=e^{-x}\sin x$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



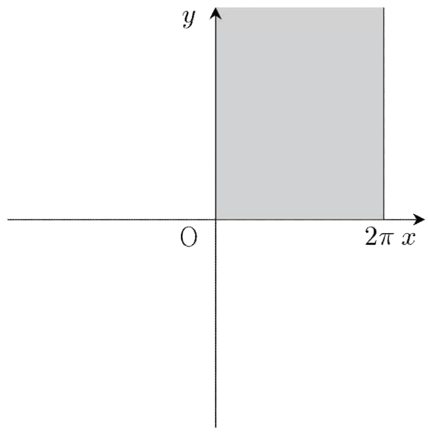
(7) $f(x)=x+\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 $0\le x\le 2\pi$이다.

$0\le x\le 2\pi$일 때, $f(x)\ge 0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

(만약 정의역이 실수 전체의 집합이면 원점 대칭이다.)

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$, $f(\pi)=\pi$, $f(2\pi)=2\pi$이므로

세 점 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ \pi)$, $(2\pi,\ 2\pi)$를 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=1+\cos x$이므로 $f'(x)\ge 0$

$f''(x)=-\sin x$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

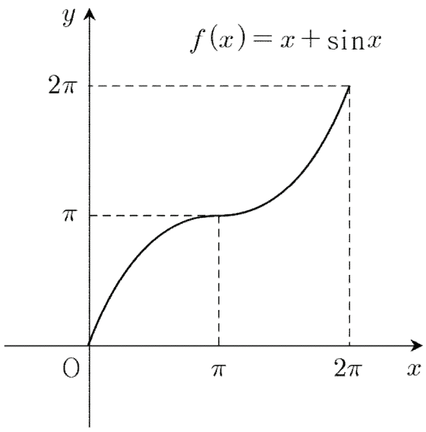
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0 (변곡점)	↗	π 변곡점	↗	2π (변곡점)

❻ 점근선

함수 $f(x)$의 그래프는 점근선을 갖지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=x+\sin x$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(8) $f(x)=x+2\cos x \ (0 \le x \le 2\pi)$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 $0 \le x \le 2\pi$이다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=2$이므로 점 $(0,\ 2)$를 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=1-2\sin x$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{6}$

$f''(x)=-2\cos x$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pi}{2}$

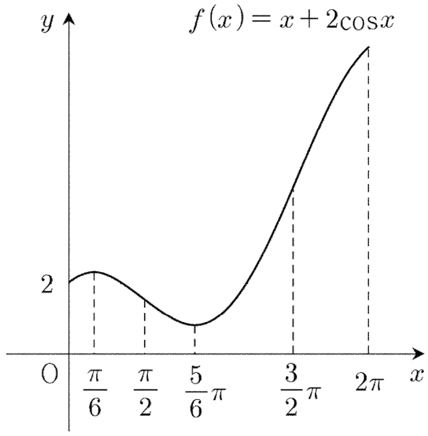
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	2	↗	극대	↘	변곡점
$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
↘	극소	↗	변곡점	↗	$2\pi+2$

❻ 점근선

함수 $f(x)$의 그래프는 점근선을 갖지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(9) $f(x)=\sin x+\cos x \ (0 \le x \le 2\pi)$

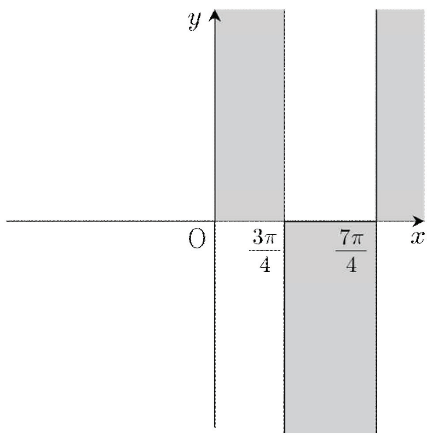
❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 $0 \le x \le 2\pi$이다.

$0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4} \le x \le 2\pi$일 때, $f(x) \ge 0$이고,

$\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$일 때, $f(x) \le 0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



귀류법에 의하여 곡선 $y=f(x)$는

두 점 $\left(\frac{3\pi}{4},\ 0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4},\ 0\right)$을 지난다.

❷ 대칭성과 주기

$f(x+2\pi)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다.

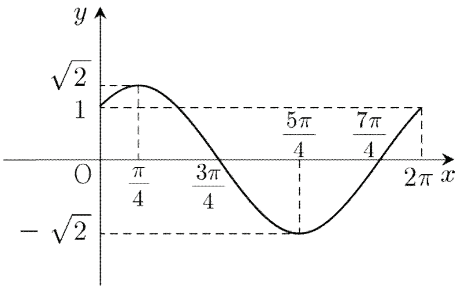
❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=1$이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

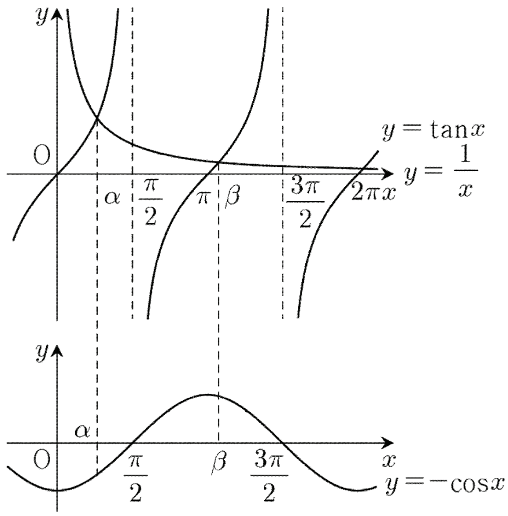
❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
$f'(x)=\cos x-\sin x$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{4}$
$f''(x)=-\sin x-\cos x$이므로
$f''(x)=0$에서 $x=\frac{3\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7\pi}{4}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$ 극대	↘	0 변곡점
$\cdots$	$\frac{5\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
↘	$-\sqrt{2}$ 극소	↗	0 변곡점	↗	1

❻ 점근선
함수 $f(x)$의 그래프는 점근선을 갖지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(10) $f(x)=x\sin x+\cos x\ \ (0\le x\le 2\pi)$
❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)
함수 $f(x)$의 정의역은 $0\le x\le 2\pi$이다.
❷ 대칭성과 주기
임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (하지만 문제에서 주어진 정의역은 $0\le x\le 2\pi$이므로 대칭성에 대하여 생각하지 않아도 좋다.)
❸ 좌표축과의 교점
$f(0)=1$이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다.
❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
$f'(x)=x\cos x$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pi}{2}$



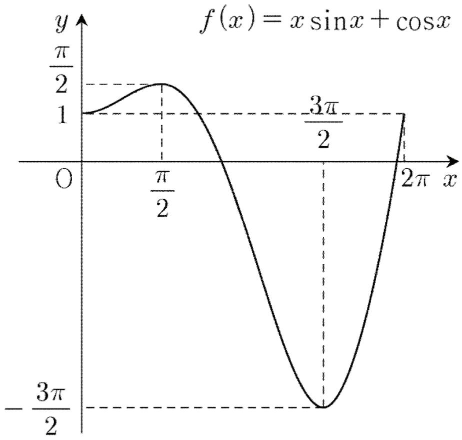
$f''(x)=\cos x-x\sin x=-x\cos x\left(\tan x-\frac{1}{x}\right)$
$f''(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 각각 $\alpha,\ \beta$라고 하면
$\tan\alpha=\frac{1}{\alpha},\ \tan\beta=\frac{1}{\beta}$이다.
$x=\alpha$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
$x=\beta$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 점 $(\beta,\ f(\beta))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
구간 $(0,\ \alpha)$, $(\beta,\ 2\pi)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고,
구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	↗	변곡점	↗	$\frac{\pi}{2}$ 극대	↘	변곡점	↘	$-\frac{3\pi}{2}$ 극소	↗	1

❻ 점근선

함수 $f(x)$는 점근선을 갖지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



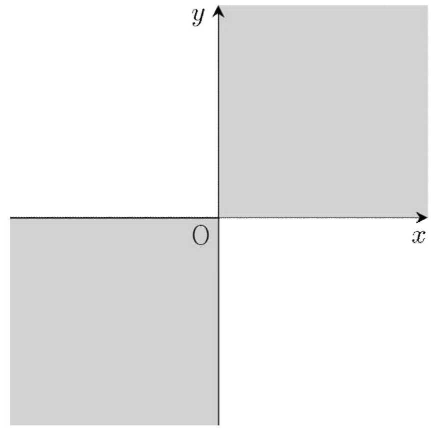
(11) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

$x>0$일 때, $f(x)>0$, $x<0$일 때, $f(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



(단, 경계는 제외)

❷ 대칭성과 주기

임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

함수 $f(x)$의 그래프는 x축, y축과 만나지 않는다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=\frac{2}{x^3}$이므로 x의 부호와 $f''(x)$의 부호가 같다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-2 극대	↘		↘	2 극소	↗

❻ 점근선

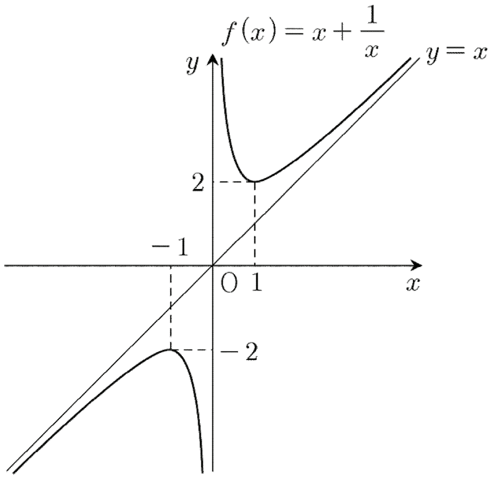
$\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty$이므로 y축은 점근선이다.

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$이므로

직선 $y=x$는 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=x+\frac{1}{x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(12) $f(x)=x-\frac{1}{x}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

❷ 대칭성과 주기

임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$이므로 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

$f''(x)=-\frac{2}{x^3}$이므로 x의 부호와 $f''(x)$의 부호는 반대다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗		↗

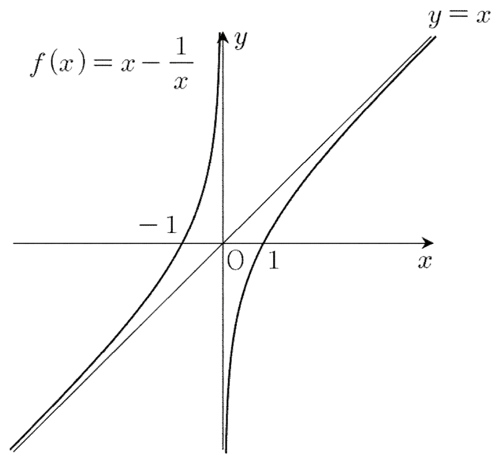
❻ 점근선

$\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=\infty$이므로 y축은 점근선이다.

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$,

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$이므로 직선 $y=x$는 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=x-\frac{1}{x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(13) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

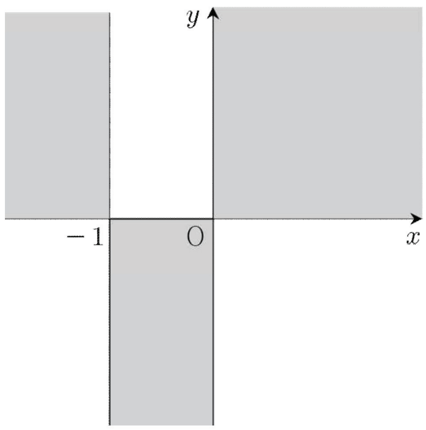
함수 $f(x)$의 정의역은 0을 제외한 모든 실수의 집합이다.

$x<-1$일 때, $f(x)>0$,

$-1<x<0$일 때, $f(x)<0$,

$x>0$일 때, $f(x)>0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



귀류법에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(-1)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^3-1}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$f''(x)=2+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=-1$

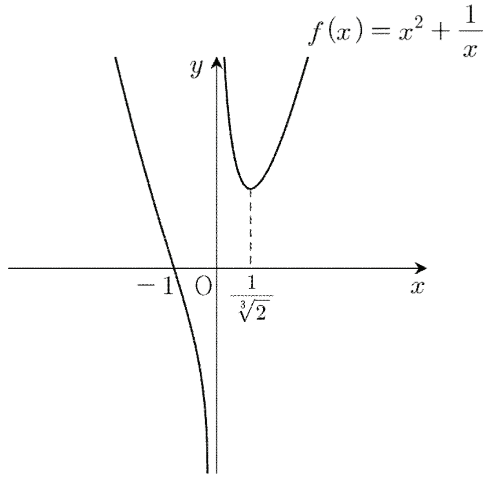
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	╳	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	╳	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	╳	↘	극소	↗

❻ 점근선

$\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty$이므로

y축은 함수 $f(x)$의 점근선이다.



(14) $f(x)=x^2-3x-\dfrac{1}{x}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

(함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나지만, 교점의 x좌표를 반드시 찾을 수 있어야 하는 것은 아니다.)

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=2x-3+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(2x+1)(x-1)^2}{x^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$f''(x)=2-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

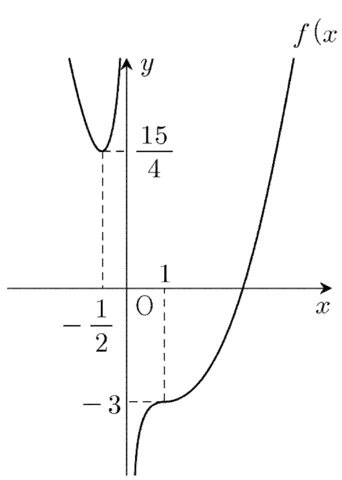
x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{15}{4}$ 극소	↗		↗	-3 변곡점	↗

❻ 점근선

$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = \infty$이므로

y축은 점근선이다.

따라서 함수 $f(x) = x^2 - 3x - \frac{1}{x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(15) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

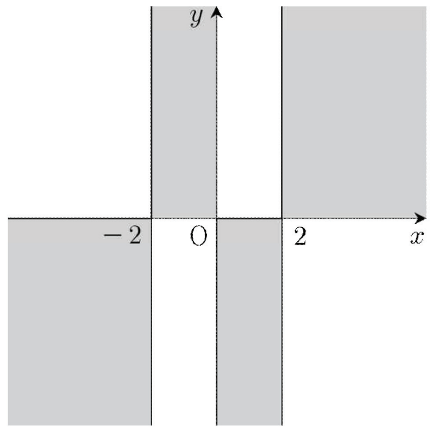
❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 ± 2를 제외한 실수 전체의 집합이다.

$x < -2$, $0 < x < 2$일 때, $f(x) < 0$

$-2 < x < 0$, $x > 2$일 때, $f(x) > 0$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지나야 한다.

❷ 대칭성과 주기

$f(-x) = -f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0) = 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{(x^2-4)^2}$이므로 $f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = \pm 2\sqrt{3}$

$f''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$이므로

$f''(x) = 0$에서 $x = 0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	극대 $-3\sqrt{3}$	↘		↘	변곡점	↘		↘	극소 $3\sqrt{3}$	↗

❻ 점근선

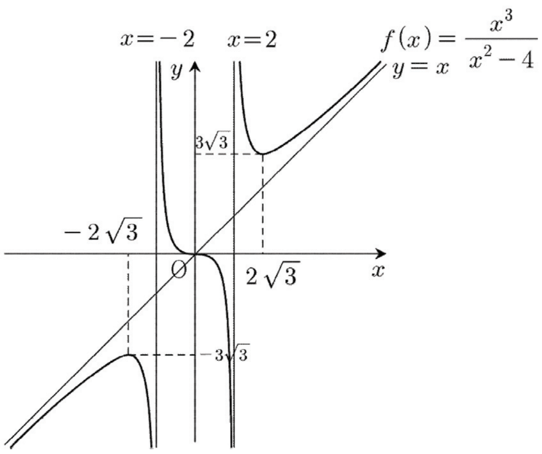
$\lim_{x \to 2+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \to -2+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -2-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \to \infty} \{f(x) - x\} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{4x}{x^2 - 4} = 0$,

$\lim_{x \to -\infty} \{f(x) - x\} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{x^2 - 4} = 0$

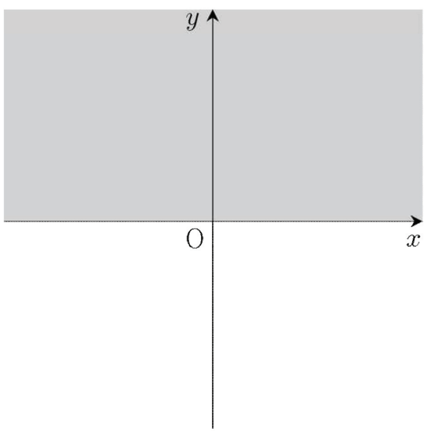
이므로 세 직선 $x = 2$, $x = -2$, $y = x$는 점근선이다.



(16) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



❷ 대칭성과 주기

$f(-x) = f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0) = 1$이므로 y축과의 교점은 $(0,\ 1)$이다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$이므로 $f'(x) = 0$에서 $x = 0$

$f''(x) = \dfrac{2(3x^2 - 1)}{(x^2+1)^3}$이므로 $f''(x) = 0$에서

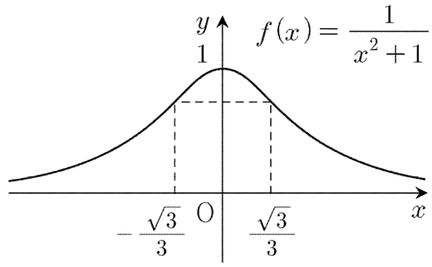
$x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	변곡점	↗	1 극대	↘	변곡점	↘

❻ 점근선

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$이므로 x축은 점근선이다.



(17) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

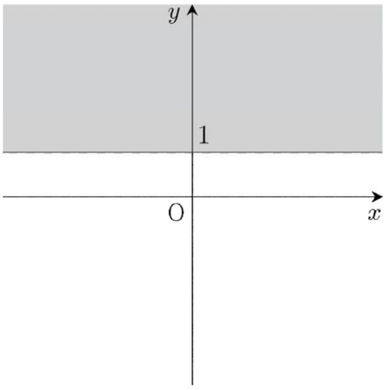
❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
산술기하절대부등식에 의하여

$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^x e^{-x}} = 1$

(단, 등호는 $x = 0$일 때 성립한다.)
이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 1$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



❷ 대칭성과 주기

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=1$이므로 y축과의 교점은 $(0,\ 1)$이다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$

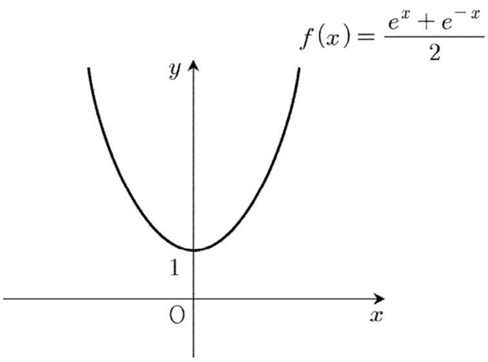
$f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

❻ 점근선

함수 $f(x)$는 점근선을 갖지 않는다.



(18) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

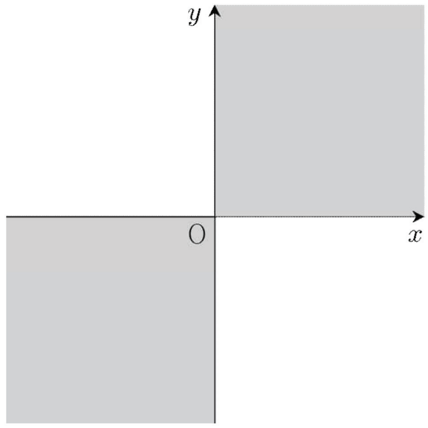
❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$x>0$일 때, $f(x)>0$이고,

$x<0$일 때, $f(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지나야 한다.

❷ 대칭성과 주기

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

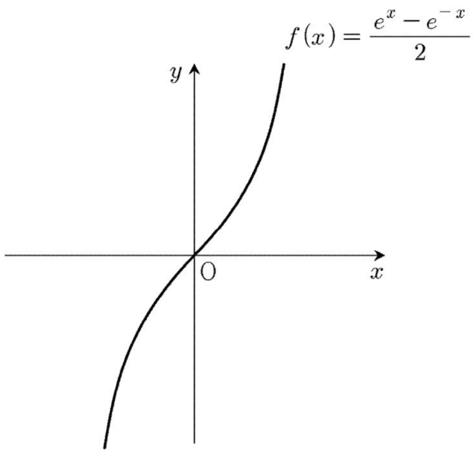
$f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

$f''(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	변곡점	↗

❻ 점근선

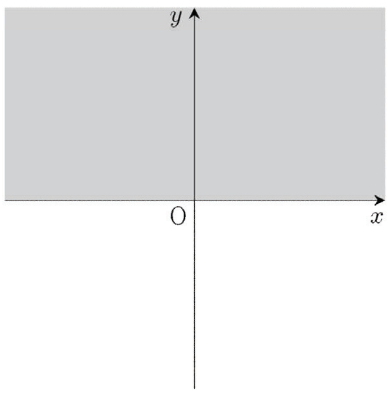


(19) $f(x)=\ln(x^2+1)$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



❷ 대칭성과 주기

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=\dfrac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$이므로 $f''(x)=0$에서

$x=\pm 1$

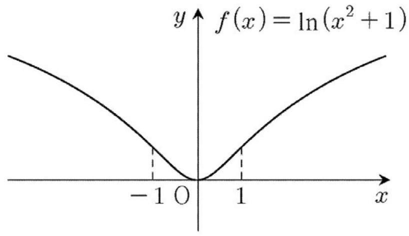
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	0 극소	↗	변곡점	↗

❻ 점근선

함수 $f(x)$는 점근선을 갖지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



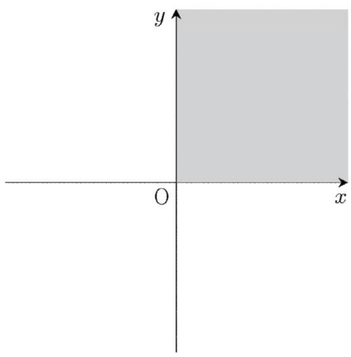
(20) $f(x)=(\ln x)^2$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 양의 실수의 전체의 집합이다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(1)=0$이므로 x축과 점 $(1,\ 0)$에서 만난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

$f''(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=e$

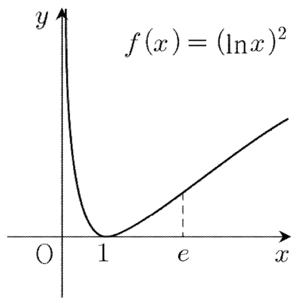
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	0 극소	↗	1 변곡점	↗

❻ 점근선

$\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$이므로 y축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=(\ln x)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(21) $f(x)=x-\sqrt{x+1}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 -1 이상인 실수 전체의 집합이다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=-1$이므로 y축과 $(0,\ -1)$에서 만난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$이므로 $f'(x)=0$에서

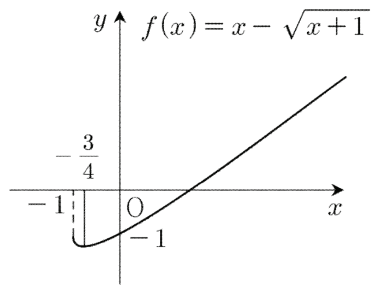
$x=-\dfrac{3}{4}$

$f''(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}}$이므로 $x>-1$인 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{3}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-1	↘	$-\dfrac{5}{4}$ 극소	↗

❻ 점근선



(22) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$이다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=1$이므로 y축과 $(0,\ 1)$에서 만난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ 이므로 $-1<x<1$ 인 실수 x 에 대하여 $f''(x)<0$ 이다.

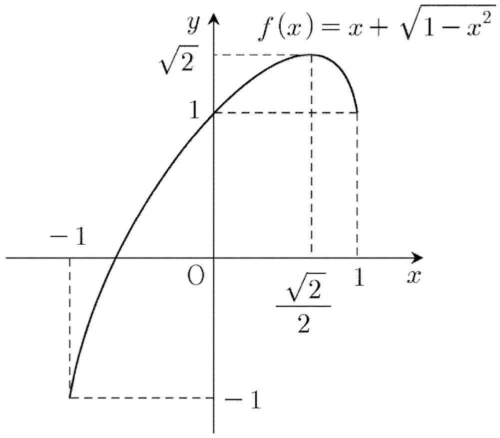
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	-1	↗	극대 $\sqrt{2}$	↘	1

❻ 점근선

함수 $f(x)$ 는 점근선을 갖지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

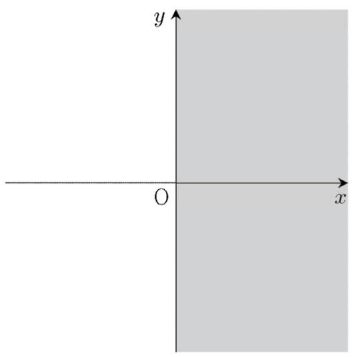


(23) $f(x)=x+\ln x$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$ 의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$ 는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

(함수 $f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나지만, 교점의 x 좌표를 반드시 찾을 수 있어야 하는 것은 아니다.)

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$ 이므로 정의역에서 $f'(x)>0$ 이다.

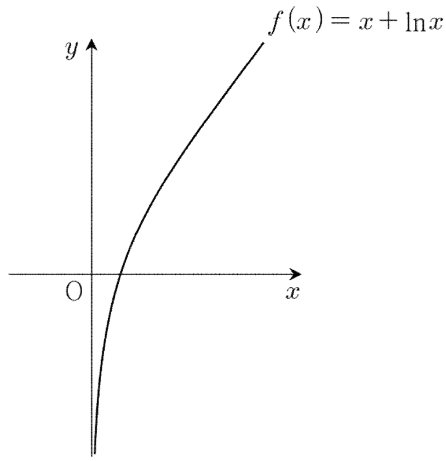
$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ 이므로 정의역에서 $f''(x)<0$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록이면서, 증가한다.

❻ 점근선

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$ 이므로 y 축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(24) $f(x)=x-\ln x$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$ 의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$ 는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

함수 $f(x)$ 의 그래프는 x 축, y 축과 만나지 않는다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서

$x=1$

$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$이므로 정의역에서 $f''(x)>0$이다.

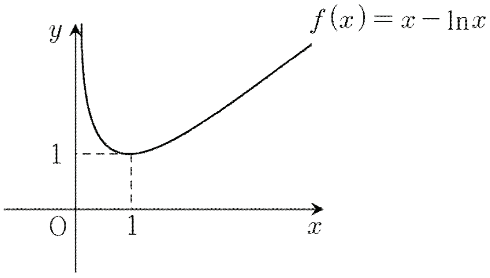
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

❻ 점근선

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\infty$이므로 y축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(25) $f(x)=x\ln x$

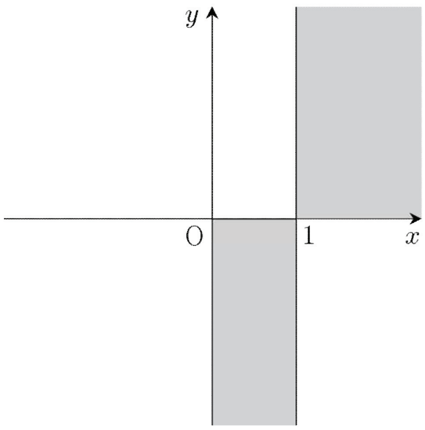
❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

$0<x<1$일 때, $f(x)<0$이고,

$x>1$일 때, $f(x)>0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 반드시 $(1,\ 0)$을 지난다.

❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(1)=0$이므로 x축과 $(1,\ 0)$에서 만난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\ln x+1$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{e}$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 정의역에서 $f''(x)>0$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

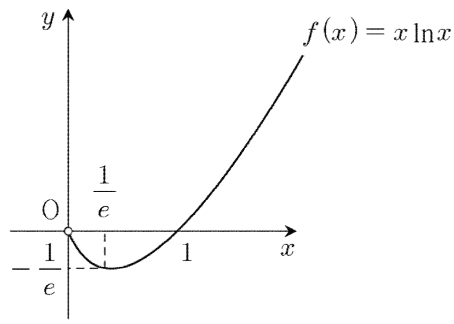
x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소 $-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

❻ 점근선

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{t\to -\infty} e^t t=\lim_{s\to\infty}\frac{-s}{e^s}=0$$

$(\ln x=t,\ t=-s)$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(26) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

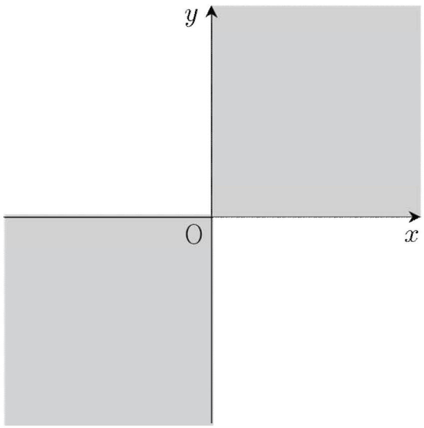
함수 $f(x)$의 정의역은 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

$x>0$일 때, $f(x)>0$이고

$x<0$일 때, $f(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에

그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

함수 $f(x)$의 그래프는 x축, y축과 만나지 않는다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

$f''(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$이므로 x의 부호와

$f''(x)$의 부호가 같다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

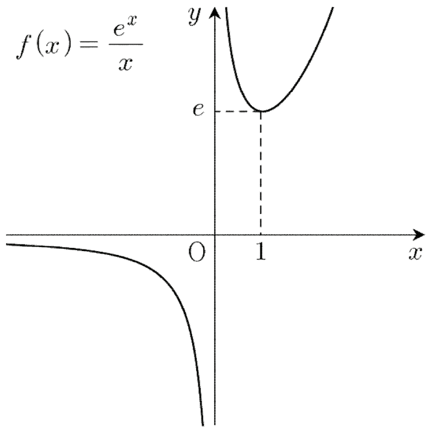
x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘		↘	e 극소	↗

❻ 점근선

$\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to0-}f(x)=-\infty$이므로

y축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



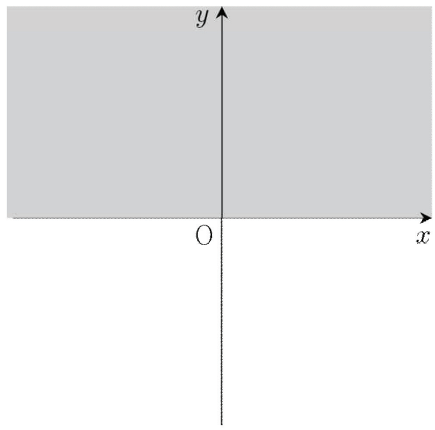
(27) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

$x\neq0$인 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기

함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.

❸ 좌표축과의 교점

함수 $f(x)$의 그래프는 x축, y축과 만나지 않는다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

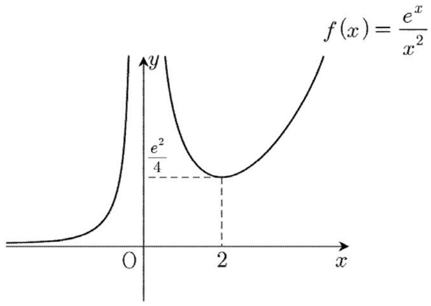
$f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=2$

$f''(x)=\dfrac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$이므로

정의역에서 $f''(x)>0$이다.
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

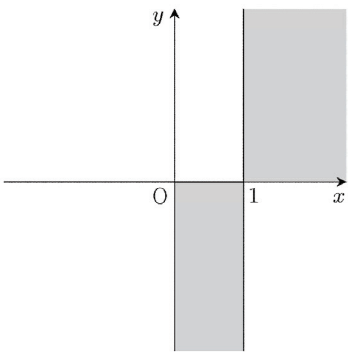
x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗		↘	$\frac{e^2}{4}$ 극소	↗

❻ 점근선
$\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0-}f(x)=\infty$ 이므로 y축이 점금선이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(28) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)
함수 $f(x)$의 정의역은 1이 아닌 양수 전체의 집합이다.
$0<x<1$일 때, $f(x)<0$이고,
$x>1$일 때, $f(x)>0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림에서 색칠된 영역에 그려진다.



❷ 대칭성과 주기
함수 $f(x)$는 대칭성과 주기를 갖지 않는다.
❸ 좌표축과의 교점
함수 $f(x)$의 그래프는 x축, y축과 만나지 않는다.
❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=e$

$f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=e^2$

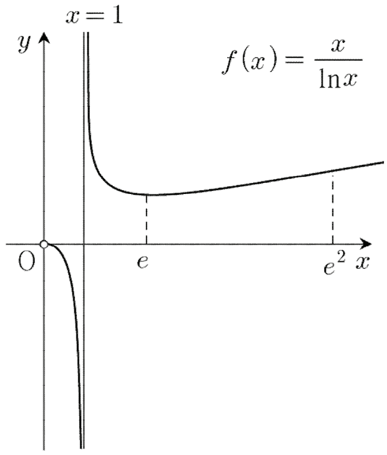
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$-$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘		↘	극소 e	↗	변곡점 $\frac{e^2}{2}$	↗

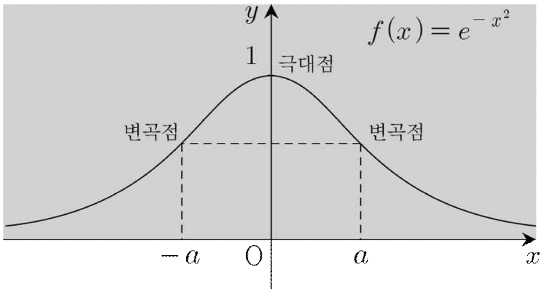
❻ 점근선
$\lim_{x\to1+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-\infty$ 이므로
직선 $x=1$이 점금선이다.

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{t\to-\infty}\dfrac{e^t}{t}=\lim_{s\to\infty}\dfrac{-1}{se^s}=0$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

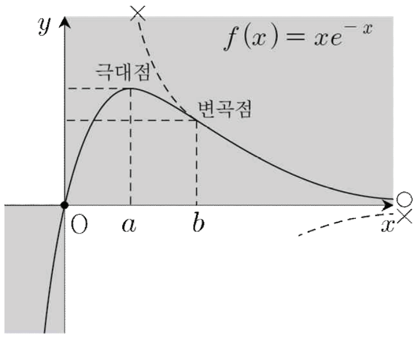


[참고]
(1) $f(x)=e^{-x^2}$



영역: 제1사분면, 제2사분면
대칭성: y축 대칭
정점: $(0,\ 1)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to\pm\infty$일 때,
$f(x)\to 0(f(x)>0)$이므로 x축이 점근선이다.
이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.
그런데 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 $f(x)$가 증가하고
구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x)$가 감소하므로
점 $(0,\ 1)$은 함수 $f(x)$의 극대점이다.
곡선 $y=f(x)$가
구간 $(-h,\ h)$에서 위로 볼록이고,
$x\to\pm\infty$일 때, 아래로 볼록이므로
곡선 $y=f(x)$는 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 각각 변곡점을 갖는다.
이때, 두 변곡점의 x좌표를 각각 $-a$, a로 두자.
(단, $a>0$)

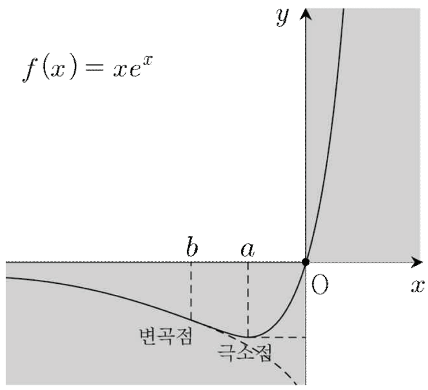
(2) $f(x)=xe^{-x}$



영역: 제1사분면, 제3사분면
대칭성: ×
정점: $(0,\ 0)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to\infty$일 때,
$f(x)\to 0(f(x)>0)$이므로 x축이 점근선이다.
이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.
구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가한 후에 감소해야 하므로 극대점을 가져야 한다. 이때, 극대점의 x좌표를 a라고 하자.
곡선 $y=f(x)$가
구간 $(a-h,\ a+h)$에서 위로 볼록이고,
$x\to\infty$일 때, 아래로 볼록이므로
곡선 $y=f(x)$는 구간 $(a,\ \infty)$에서 변곡점을 갖는다.
이때, 변곡점의 x좌표를 b로 두자. (단, $0<a<b$)
$x\to-\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이므로 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

(3) $f(x)=x^2e^{-x}$
이 함수의 그래프의 개형을 빠르게 그리는 방법은 기본개념 편에서 설명하였으므로 여기서는 생략한다.

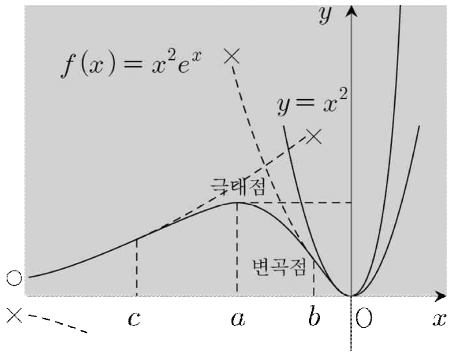
(4) $f(x)=xe^{x}$



영역: 제1사분면, 제3사분면
대칭성: ×
정점: $(0,\ 0)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to-\infty$일 때,
$f(x)\to 0(f(x)<0)$이므로 x축이 점근선이다.
이때, 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다.
구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $f(x)$는 감소한 후에 증가해야 하므로 극소점을 가져야 한다. 이때, 극소점의 x좌표를 a라고 하자.
곡선 $y=f(x)$가
$x\to-\infty$일 때, 위로 볼록이고,
구간 $(a-h,\ a+h)$에서 아래로 볼록이므로

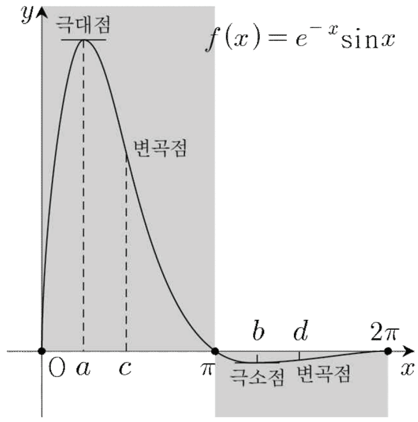
곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ a)$에서 변곡점을 갖는다.
(단, h는 충분히 작은 양수이다.)
이때, 변곡점의 x좌표를 b로 두자. (단, $b<a<0$)
$x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

(5) $f(x)=x^2e^x$



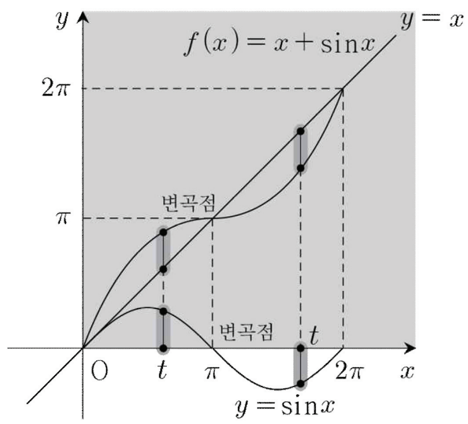
영역: 제1사분면, 제2사분면
대칭성: ×
정점: $(0,\ 0)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to-\infty$일 때,
$f(x)\to 0(f(x)>0)$이므로 x축이 점근선이다.
이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.
구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $f(x)$는 증가한 후에 감소해야 하므로 극대점을 가져야 한다. 이때, 극대점의 x좌표를 a라고 하자.
곡선 $y=f(x)$가
$x\to-\infty$일 때, 아래로 볼록이고,
구간 $(a-h,\ a+h)$에서 위로 볼록이므로
곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ a)$에서 변곡점을 갖는다.
(단, h는 충분히 작은 양수)
이때, 변곡점의 x좌표를 c로 두자. (단, $c<a<0$)
$x\to 0$일 때, $e^x\approx 1$이므로 $f(x)\approx x^2$이다. 즉, 구간 $(-h,\ h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^2$에 한없이 가까워진다. 이때, 구간 $(-h,\ h)$에서 곡선 $y=x^2$이 아래로 볼록이므로 곡선 $y=f(x)$도 아래로 볼록임을 알 수 있다.
구간 $(a-h,\ a+h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(a,\ 0)$에서 변곡점을 가져야 한다. 이때, 변곡점의 x좌표를 b라고 하자. (단, $a<b<0$)
$x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

(6) $f(x)=e^{-x}\sin x\ \ (0\le x\le 2\pi)$



영역: 제1사분면과 제4사분면의 일부
대칭성: ×
정점: $(0,\ 0)$, $(\pi,\ 0)$, $(2\pi,\ 0)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
롤의 정리에 의하여
$f'(a)=f'(b)=0$
가 되는 a, b가 각각
두 구간 $(0,\ \pi)$, $(\pi,\ 2\pi)$에 존재한다.
그런데 구간 $(0,\ \pi)$에서 $f(x)>0$이고,
구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서 $f(x)<0$이므로
두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$는 각각
함수 $f(x)$의 극대점과 극소점이다.
곡선 $y=f(x)$가 극대점 $(a,\ f(a))$ 좌우에서 위로 볼록이고, 극소점 $(b,\ f(b))$의 좌우에서 아래로 볼록이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에서 변곡점을 가질 수밖에 없다. 이때, 변곡점의 x좌표를 c라고 하자. (단, $a<c<b$)
곡선 $y=f(x)$가 극소점 $(b,\ f(b))$의 좌우에서 아래로 볼록이고, 점 $(2\pi,\ 0)$에서 위로 볼록이므로(←이계도함수에서 $f''(2\pi)<0$) 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(b,\ 2\pi)$에서 변곡점을 가질 수밖에 없다. 이때, 변곡점의 x좌표를 d라고 하자. (단, $b<d<2\pi$)

(7) $f(x)=x+\sin x\ \ (0\le x\le 2\pi)$



영역: 제1사분면

대칭성: × (만약 정의역이 실수 전체의 집합이면 원점에 대하여 대칭이다.)

정점: $(0,\ 0)$, $(\pi,\ \pi)$, $(2\pi,\ 2\pi)$

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x=t$일 때의 $f(x)$의 함숫값은 두 함수 $y=x$, $y=\sin x$의 $x=t$에서의 함숫값의 합과 같다. (위의 그림에서 직선 $x=t$ 위에 놓인 두 선분의 길이는 같다.)

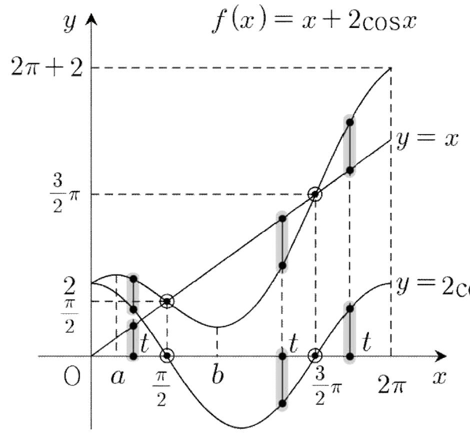
$0<t<\pi$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$의 위쪽 방향에 그려진다. ($\because \sin t>0$) 이때, 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록임을 짐작할 수 있다. 즉, 구간 $(0,\ \pi)$에서의 곡선 $y=\sin x$의 볼록이 곡선 $y=f(x)$에서도 유지되는 것이다. ($f''(x)=-\sin x$에서 바로 확인이 가능하다.)

$\pi<t<2\pi$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$의 아래쪽 방향에 그려진다. ($\because \sin t<0$) 이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록임을 짐작할 수 있다. 즉, 구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서의 곡선 $y=\sin x$의 볼록이 곡선 $y=f(x)$에서도 유지되는 것이다. ($f''(x)=-\sin x$에서 바로 확인이 가능하다.)

따라서 점 $(\pi,\ \pi)$는 변곡점이다.

이처럼 함수의 그래프의 개형을 두 함수의 사칙연산으로 그릴 수도 있다.

(8) $f(x)=x+2\cos x\ (0\le x\le 2\pi)$



(단, ⊙는 변곡점이다.)

영역: × (제1사분면이지만, 도함수를 이용하여 직선 $y=x$와 곡선 $y=2\cos x$의 위치관계를 정확하게 파악하지 않으면 곡선 $y=f(x)$가 제4사분면을 지나지 않을 것이라고 확신할 수 없다.)

대칭성: ×

정점: $(0,\ 2)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$, $(2\pi,\ 2\pi+2)$

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x=t$일 때의 $f(x)$의 함숫값은 두 함수 $y=x$, $y=2\cos x$의 $x=t$에서의 함숫값의 합과 같다. (위의 그림에서 직선 $x=t$ 위에 놓인 두 선분의 길이는 같다.)

한편 세 함수

$y=x$, $y=2\cos x$, $y=f(x)$

의 이계도함수는 각각

$y''=0$, $y''=-2\cos x$, $y''=-2\cos x$

이므로 두 함수

$y=2\cos x$, $y=f(x)$

의 이계도함수는 같다.

따라서 곡선 $y=2\cos x$의 볼록이 곡선 $y=f(x)$에서도 유지된다.

곡선 $y=f(x)$는

(곡선 $y=2\cos x$와 마찬가지로)

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, 위로 볼록이고,

$\frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, 아래로 볼록이고,

$\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$일 때, 위로 볼록이다.

따라서 두 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$는 변곡점이다.

그리고 곡선 $y=f(x)$는 세 구간

$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$

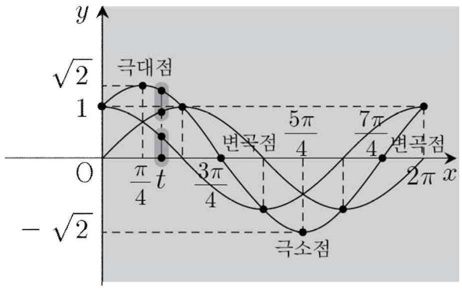
에서 각각 직선 $y=x$의

위쪽 방향, 아래쪽 방향, 위쪽 방향에 그려진다.

위의 그림에서 두 극점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$의 존재는 도함수를 이용하여 밝혀야 한다.

이처럼 함수의 그래프의 개형을 두 함수의 사칙연산으로 그릴 수도 있다.

(9) $f(x)=\sin x+\cos x\ \ (0\le x\le 2\pi)$



영역: 제1사분면, 제4사분면

대칭성: 점대칭○, 선대칭○ (다만 원점이나 y축에 대하여 대칭인 것은 아니다.)

정점: 아래의 7개의 점을 찍을 수 있어야 한다.

$(0,\ 1)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$, $(\pi,\ -1)$,

$\left(\frac{3}{2}\pi,\ -1\right)$, $\left(\frac{7}{4}\pi,\ 0\right)$, $(2\pi,\ 1)$

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x=t$일 때의 $f(x)$의 함숫값은 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 $x=t$에서의 함숫값의 합과 같다. (위의 그림에서 직선 $x=t$ 위에 놓인 두 선분의 길이는 같다.)

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 롤의 정리를 적용하면

$f'(a)=0$인 a가 이 구간에 적어도 하나 이상 존재한다.

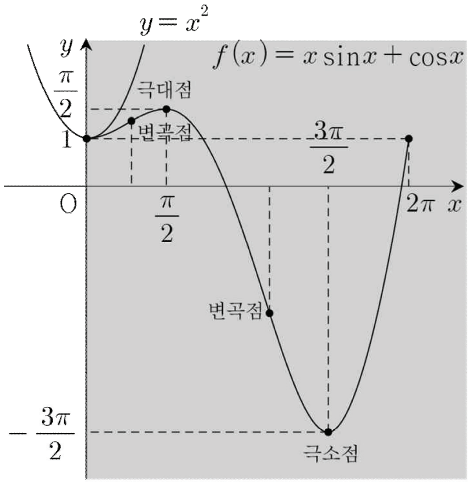
그런데 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 위로 볼록인 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$는 모두 직선 $y=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로 $a=\frac{\pi}{4}$임을 알 수 있다.

이때, 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$는 극대점이다.

구간 $\left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$에서 마찬가지의 방법으로 점 $\left(\frac{5}{4}\pi,\ -\sqrt{2}\right)$가 극소점임을 알 수 있다.

이처럼 함수의 그래프의 개형을 두 함수의 사칙연산으로 그릴 수도 있다.

(10) $f(x)=x\sin x+\cos x\ \ (0\le x\le 2\pi)$



영역: 제1사분면, 제4사분면

대칭성: × (만약 정의역이 실수 전체의 집합이면 y축에 대하여 대칭이다.)

정점: 아래의 4개의 점을 찍을 수 있어야 한다.

$(0,\ 1)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$,

$\left(\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi\right)$, $(2\pi,\ 1)$

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x\to 0+$일 때, $\sin x\approx x$, $\cos x\approx 1$이므로

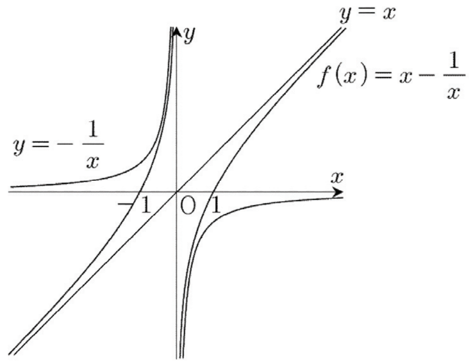
$f(x)\approx x^2+1$

즉, 구간 $(-h,\ h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^2+1$에 한없이 가까워진다. (단, h는 충분히 작은 양수) 이때, 구간 $(-h,\ h)$에서 곡선

$y=x^2+1$이 아래로 볼록이므로 곡선 $y=f(x)$도 아래로 볼록임을 알 수 있다. 그리고 $(0,\ 1)$은 곡선 $y=f(x)$의 극소점이다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=x\cos x$
방정식 $f'(x)=0$을 풀면
$x=0$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$
함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$에서 증가했다가 감소하므로 이 구간에서 극댓값을 가질 수밖에 없다. 이때, $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$가 극대점이 된다.
함수 $f(x)$는 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 2\pi\right)$에서 감소했다가 증가하므로 이 구간에서 극솟값을 가질 수밖에 없다. 이때, $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ -\dfrac{3}{2}\pi\right)$가 극소점이 된다.
곡선 $y=f(x)$가 극소점 $(0,\ 1)$ 좌우에서 아래로 볼록이고, 극대점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$의 좌우에서 위로 볼록이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 변곡점을 가질 수밖에 없다.
곡선 $y=f(x)$가 극대점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 좌우에서 위로 볼록이고, 극소점 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ -\dfrac{3}{2}\pi\right)$의 좌우에서 아래로 볼록이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$에서 변곡점을 가질 수밖에 없다.

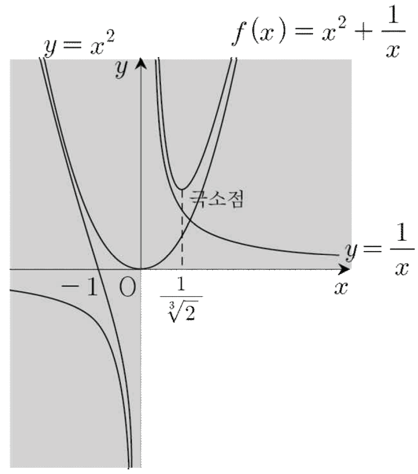
(11) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$
이 함수의 그래프의 개형을 빠르게 그리는 방법은 기본개념 편에서 설명하였으므로 여기서는 생략한다.

(12) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$



영역: 모든 사분면
대칭성: 원점 대칭
정점: $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to\infty$일 때, $-\dfrac{1}{x}\to 0\left(-\dfrac{1}{x}<0\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$의 아래쪽에서 이 직선에 한없이 가까워진다.
$x\to-\infty$일 때, $-\dfrac{1}{x}\to 0\left(-\dfrac{1}{x}>0\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$의 위쪽에서 이 직선에 한없이 가까워진다.
$x\to 0+$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다.
$x\to 0-$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$의 아래쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다.

(13) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$



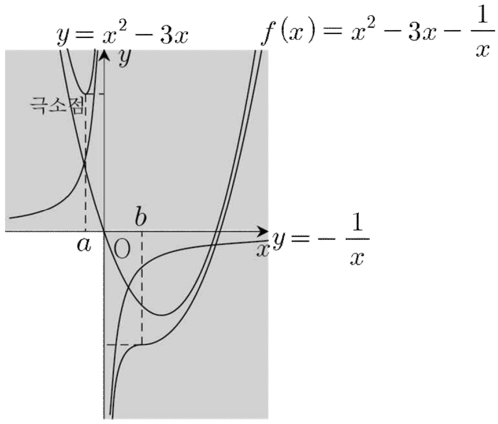
영역: 제4사분면 제외
(그래프를 그리고 나서 알 수 있다.)
대칭성: ×
정점: $(-1,\ 0)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
우선 함수 $f(x)$의 극솟값을 구해보자.
산술기하절대부등식에 의하여
$x>0$일 때,

$$x^2+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\frac{1}{2x}\frac{1}{2x}}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

(단, 등호는 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$일 때 성립한다.)
이므로 점 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$는
곡선 $y=f(x)$의 극소점이다.
$x\to\infty$일 때, $\frac{1}{x}\to 0(\frac{1}{x}>0)$이므로 곡선
$y=f(x)$는 곡선 $y=x^2$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^2$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.
$x\to-\infty$일 때, $\frac{1}{x}\to 0(\frac{1}{x}<0)$이므로 곡선
$y=f(x)$는 곡선 $y=x^2$의 아래쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^2$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.
$x\to 0+$일 때, $x^2\to 0(x^2>0)$이므로 곡선
$y=f(x)$는 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선
$y=\frac{1}{x}$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.
$x\to 0-$일 때, $x^2\to 0(x^2>0)$이므로 곡선
$y=f(x)$는 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선
$y=\frac{1}{x}$와 마찬가지로 위로 볼록이다.
구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 ∞의 상태에서 감소한 후에 증가하여 ∞의 상태가 되므로 극솟값을 갖는다. 위에서 증명한 것처럼 이 극소점의 x좌표는 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$이다.
곡선 $y=f(x)$는
$x\to-\infty$일 때, 아래로 볼록이고
$x\to 0-$일 때, 위로 볼록이므로
구간 $(-\infty,\ 0)$에서 변곡점을 갖는다.
이때, 변곡점이 $(-1,\ 0)$인 것은 이계도함수로 증명해야 한다.

(14) $f(x)=x^2-3x-\frac{1}{x}$



영역: 제3사분면 제외
(그래프를 그리고 나서 알 수 있다.)
대칭성: ×
정점: x절편 하나 (하지만 x절편의 값을 구할 필요까지는 없다.)
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to\infty$일 때, $-\frac{1}{x}\to 0(-\frac{1}{x}<0)$이므로 곡선
$y=f(x)$는 곡선 $y=x^2-3x$의 아래쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^2-3x$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.
$x\to-\infty$일 때, $-\frac{1}{x}\to 0(-\frac{1}{x}>0)$이므로 곡선
$y=f(x)$는 곡선 $y=x^2-3x$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^2-3x$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.
$x\to 0+$일 때, $x^2-3x\to 0(x^2-3x<0)$이므로
곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-\frac{1}{x}$의 아래쪽에서 이

곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-\dfrac{1}{x}$와 마찬가지로 위로 볼록이다.

$x\to 0-$일 때, $x^2-3x\to 0(x^2-3x>0)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-\dfrac{1}{x}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-\dfrac{1}{x}$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.

구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $f(x)$는 ∞의 상태에서 감소한 후에 증가하여 ∞의 상태가 되므로 극솟값을 갖는다. 이때, 극소점의 x좌표를 a라고 하자.

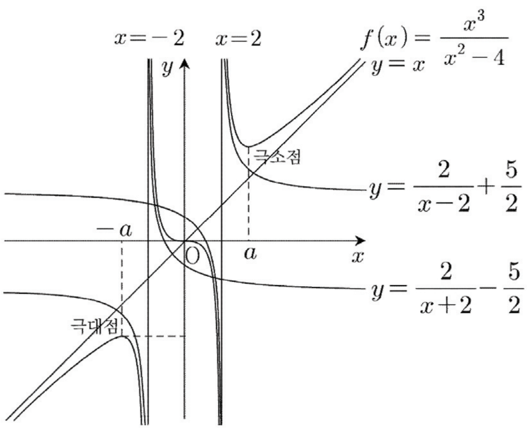
$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 사이값 정리에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 x축과 적어도 한 점에서 만난다.

곡선 $y=f(x)$는
$x\to 0+$일 때, 위로 볼록이고
$x\to\infty$일 때, 아래로 볼록이므로
구간 $(0,\ \infty)$에서 변곡점을 갖는다.

(15) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

함수 $f(x)$의 방정식을 변형하면

$$f(x)=x+\frac{4x}{x^2-4}=x+\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x-2}$$



영역: 모든 사분면
(그래프를 그리고 나서 알 수 있다.)
대칭성: 원점 대칭
정점: 원점
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x\to\infty$일 때, $\dfrac{4x}{x^2-4}\to 0\left(\dfrac{4x}{x^2-4}>0\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$의 위쪽에서 이 직선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.

$x\to 2+$일 때, $x+\dfrac{2}{x+2}\to\dfrac{5}{2}\left(x+\dfrac{2}{x+2}>\dfrac{5}{2}\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{5}{2}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{5}{2}$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.

$x\to 2-$일 때, $x+\dfrac{2}{x+2}\to\dfrac{5}{2}\left(x+\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{5}{2}\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{5}{2}$의 아래쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{5}{2}$와 마찬가지로 위로 볼록이다.

곡선 $y=f(x)$는 원점 대칭이므로 다음이 성립한다.
$x\to-\infty$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$의 아래쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다.

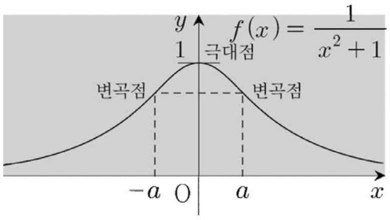
$x\to-2-$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{5}{2}$의 아래쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{5}{2}$와 마찬가지로 위로 볼록이다.

$x\to-2+$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{5}{2}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{5}{2}$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 ∞의 상태에서 감소한 후에 증가하여 ∞의 상태가 되므로 극솟값을 갖는다. 이때, 극소점의 x좌표를 a라고 하자.
곡선 $y=f(x)$는 원점 대칭이므로 다음이 성립한다.
구간 $(-\infty,\ -2)$에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는

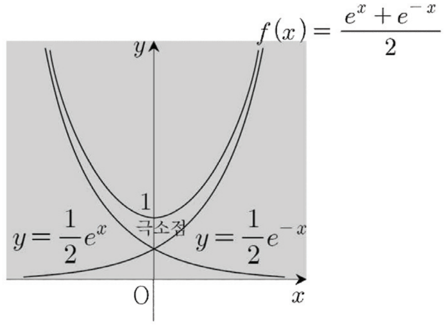
다. 이때, 극대점의 x좌표는 $-a$이다.
곡선 $y=f(x)$는
$x\to -2+$일 때, 아래로 볼록이고
$x\to 2-$일 때, 위로 볼록이므로
구간 $(-2,\ 2)$에서 변곡점을 갖는다.
그런데 곡선 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로
변곡점은 원점이다.

(16) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$



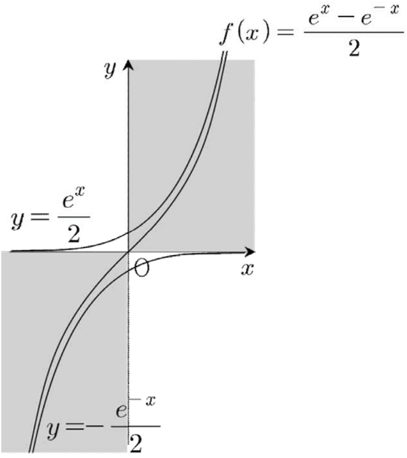
영역: 제1사분면, 제2사분면
대칭성: y축 대칭
정점: $(0,\ 1)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to \pm\infty$일 때,
$f(x)\to 0(f(x)>0)$이므로 x축이 점근선이다.
이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.
그런데 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 $f(x)$가 증가하고
구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x)$가 감소하므로
점 $(0,\ 1)$은 함수 $f(x)$의 극대점이다.
곡선 $y=f(x)$가
구간 $(-h,\ h)$에서 위로 볼록이고,
$x\to \pm\infty$일 때, 아래로 볼록이므로
곡선 $y=f(x)$는 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 각각 변곡점을 갖는다.
이때, 두 변곡점의 x좌표를 각각 $-a$, a로 두자. (단, $a>0$)

(17) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$



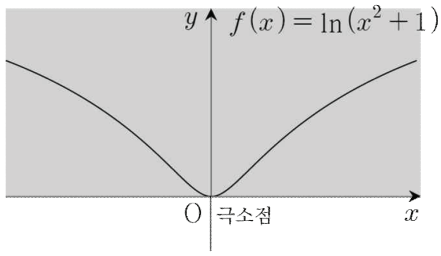
영역: 제1사분면, 제2사분면
대칭성: y축 대칭
정점: $(0,\ 1)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to\infty$일 때, $\dfrac{e^{-x}}{2}\to 0\left(\dfrac{e^{-x}}{2}>0\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{e^x}{2}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{e^x}{2}$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.
$x\to -\infty$일 때, $\dfrac{e^x}{2}\to 0\left(\dfrac{e^x}{2}>0\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{e^{-x}}{2}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{e^{-x}}{2}$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.
구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 ∞의 상태에서 감소한 후에 증가하여 ∞의 상태가 되므로 극솟값을 갖는다. 그런데 곡선 $y=f(x)$가 y축에 대하여 대칭이므로 극소점은 $(0,\ 1)$이다.

(18) $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$



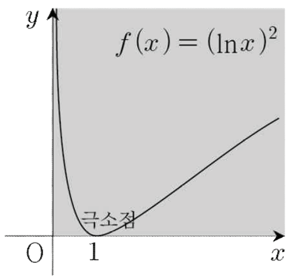
영역: 제1사분면, 제3사분면
대칭성: 원점 대칭
정점: 원점
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to\infty$일 때, $-\dfrac{e^{-x}}{2}\to0\left(-\dfrac{e^{-x}}{2}<0\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{e^{x}}{2}$의 아래쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{e^{x}}{2}$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.
$x\to-\infty$일 때, $\dfrac{e^{x}}{2}\to0\left(\dfrac{e^{x}}{2}>0\right)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-\dfrac{e^{-x}}{2}$의 위쪽에서 이 곡선에 한없이 가까워진다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-\dfrac{e^{-x}}{2}$와 마찬가지로 위로 볼록이다.
곡선 $y=f(x)$는
$x\to-\infty$일 때, 위로 볼록이고
$x\to\infty$일 때, 아래로 볼록이므로
구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 변곡점을 갖는다.
그런데 곡선 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 변곡점은 원점이다.

(19) $f(x)=\ln(x^2+1)$



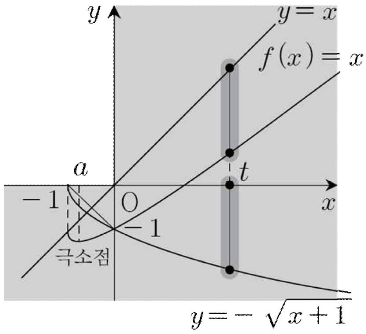
영역: 제1사분면, 제2사분면
대칭성: y축 대칭
정점: 원점
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to\pm\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이고,
$x\to0\pm$일 때, $f(x)\to0(f(x)>0)$이다.
함수 $f(x)$가
구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소하고
구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하므로
원점 $(0,\ 0)$은 이 함수의 극소점이다.
변곡점의 존재성은 이계도함수를 이용하여 밝혀야 한다.

(20) $f(x)=(\ln x)^2$



영역: 제1사분면
대칭성: ×
정점: $(1,\ 0)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to0+$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 y축은 점근선이다.
곡선 $y=f(x)$가 제1사분면에서 점 $(1,\ 0)$에서 x축에 접해야하므로 점 $(1,\ 0)$은 이 곡선의 극소점이다.
변곡점의 존재성은 이계도함수를 이용하여 밝혀야 한다.

(21) $f(x)=x-\sqrt{x+1}$

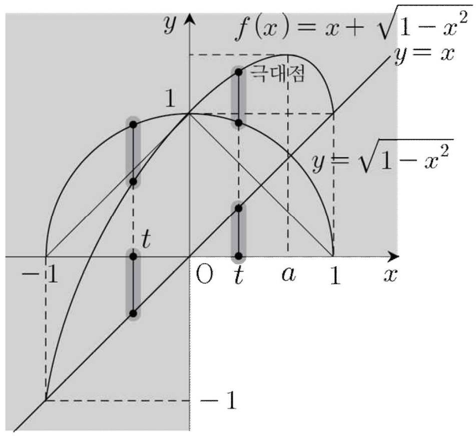


영역: 제2사분면 제외
(그래프를 그리고 나서 알 수 있다.)
대칭성: ×
정점: $(-1,\ -1)$, $(0,\ -1)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x=t$일 때의 $f(x)$의 함숫값은 두 함수 $y=x$, $y=-\sqrt{x+1}$의 $x=t$에서의 함숫값의 합과 같다. (위의 그림에서 직선 $x=t$ 위에 놓인 두 선분의 길이는 같다.)
구간 $(-1,\ 0)$에서 롤의 정리를 적용하면 $f'(a)=0$인 a가 이 구간에 적어도 하나 이상 존재한다.

그런데 구간 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=-\sqrt{x+1}$이 직선 $y=-x-1$의 아래쪽에 있으므로 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록이다. 왜냐하면 두 직선 $y=x$, $y=-x-1$을 더하면 직선 $y=-1$(상수함수)가 되어 상쇄되기 때문이다. 이때, 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 극소점이다.

$x\to\infty$일 때, $|x|\gg|-\sqrt{x+1}|$이므로 $f(x)\to\infty$이다.

(22) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$

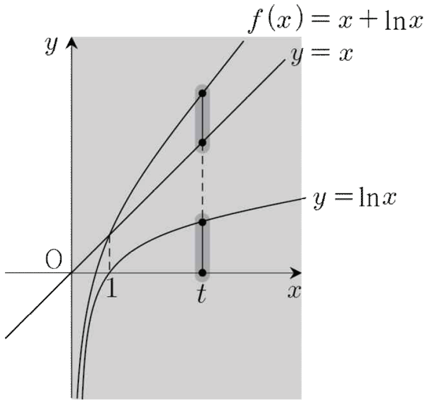


영역: 제4사분면 제외
(그래프를 그리고 나서 알 수 있다.)
대칭성: ×
정점: $(-1,\ -1)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 1)$
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x=t$일 때의 $f(x)$의 함숫값은 두 함수 $y=x$, $y=\sqrt{1-x^2}$(반원)의 $x=t$에서의 함숫값의 합과 같다. (위의 그림에서 직선 $x=t$ 위에 놓인 두 선분의 길이는 같다.)
구간 $(0,\ 1)$에서 롤의 정리를 적용하면 $f'(a)=0$인 a가 이 구간에 적어도 하나 이상 존재한다.

그런데 구간 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$이 직선 $y=-x+1$의 위쪽에 있으므로 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록이다. 왜냐하면 두 직선 $y=x$, $y=-x+1$을 더하면 직선 $y=1$(상수함수)가 되어 상쇄되기 때문이다. 이때, 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 극대점이다.

구간 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록이다. 왜냐하면 두 직선 $y=x$, $y=x+1$을 더하면 직선 $y=2x+1$이고, 이 직선의 이계도함수는 $y''=0$(더하나 마나한 수 0)이기 때문이다.

(23) $f(x)=x+\ln x$



영역: 제1사분면, 제4사분면

대칭성: ×

정점: $(1,\ 1)$

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

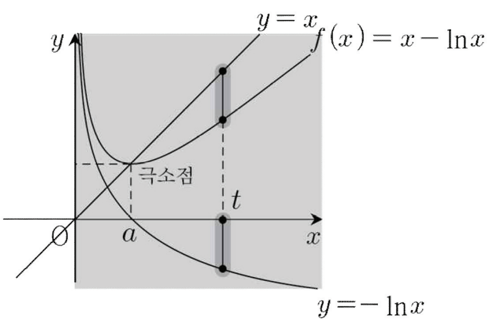
$x=t$일 때의 $f(x)$의 함숫값은 두 함수 $y=x$, $y=\ln x$의 $x=t$에서의 함숫값의 합과 같다. (위의 그림에서 직선 $x=t$ 위에 놓인 두 선분의 길이는 같다.)

$x\to 0+$일 때, $\ln x\to -\infty$에서 $f(x)\to -\infty$이므로 y축은 점근선이다.

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이다.

직선 $y=x$의 이계도함수는 $y''=0$(더하나 마나한 수 0)이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\ln x$와 마찬가지로 위로 볼록이다.

(24) $f(x)=x-\ln x$



영역: 제1사분면, 제4사분면

대칭성: ×

정점: $(1,\ 1)$

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x=t$일 때의 $f(x)$의 함숫값은 두 함수 $y=x$, $y=-\ln x$의 $x=t$에서의 함숫값의 합과 같다. (위의 그림에서 직선 $x=t$ 위에 놓인 두 선분의 길이는 같다.)

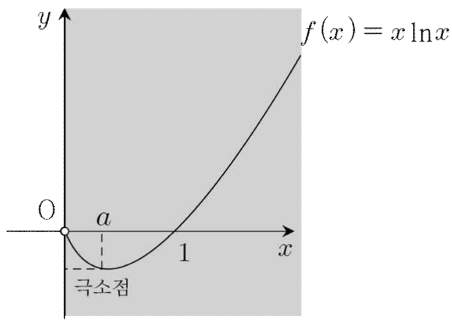
$x\to 0+$일 때, $-\ln x\to\infty$에서 $f(x)\to\infty$이므로 y축은 점근선이다.

$x\to\infty$일 때, $|x|\gg|-\ln x|$이므로 $f(x)\to\infty$이다.

직선 $y=x$의 이계도함수는 $y''=0$(더하나 마나한 수 0)이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-\ln x$와 마찬가지로 아래로 볼록이다.

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 ∞의 상태에서 감소한 후에 증가하여 ∞의 상태가 되므로 극솟값을 갖는다. 이때, 극소점의 x좌표를 a라고 하자.

(25) $f(x)=x\ln x$



영역: 제1사분면, 제4사분면

대칭성: ×

정점: $(1,\ 0)$

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x\to 0+$일 때, $x\ln x$는 $-0\cdot\infty\,((0+)\cdot(-\infty))$의 꼴이므로 치환을 이용하여 $f(x)$의 극한값을 구해야 한다.

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{t\to-\infty}e^t t=\lim_{s\to\infty}\frac{-s}{e^s}=0$$

$(\ln x=t,\ t=-s)$

이때, $f(x)<0$이다.

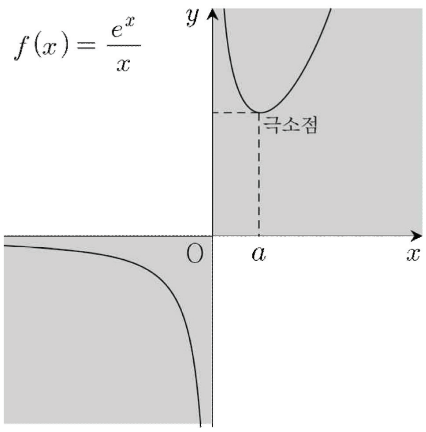
점 $(1,\ 0)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$가 $x\to 0+$일 때, 제4사분면에서 원점에 한없이 가까워지므로 롤의 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 상수 a가 적어도 하나 존재한다. (단, $0<a<1$)

이때, 점 $(a,\ f(a))$는 극소점이다.

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 구간 $(0,\ \infty)$에서

함수 $f(x)$는 증가한다.

(26) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$



영역: 제1사분면, 제3사분면

대칭성: ×

정점: ×

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x\to\infty$일 때, $e^x \gg x$이므로 $f(x)\to\infty$이다.

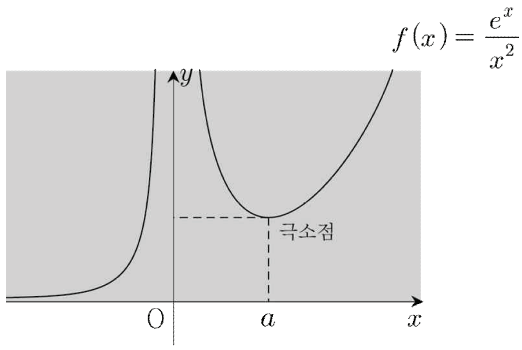
$x\to 0+$일 때, $e^x\to 1$, $\dfrac{1}{x}\to\infty$에서 $f(x)\to\infty$이므로 y축은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.

$x\to 0-$일 때, $e^x\to 1$, $\dfrac{1}{x}\to-\infty$에서 $f(x)\to-\infty$이므로 y축은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다.

$x\to-\infty$일 때, $e^x\to 0(e^x>0)$이므로 $f(x)\to 0$ $(f(x)<0)$이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다.

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$는 ∞의 상태에서 감소한 후에 증가하여 ∞의 상태가 되므로 극솟값을 갖는다. 이때, 극소점의 x좌표를 a라고 하자.

(27) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$



영역: 제1사분면, 제2사분면

대칭성: ×

정점: ×

증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:

$x\to\infty$일 때, $e^x\gg x^2$이므로 $f(x)\to\infty$이다.

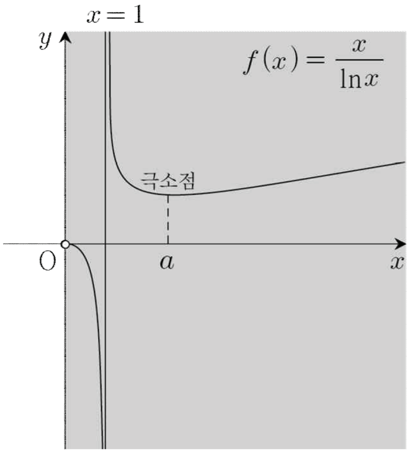
$x\to 0+$일 때, $e^x\to 1$, $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$에서 $f(x)\to\infty$이므로 y축은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.

$x\to 0-$일 때, $e^x\to 1$, $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$에서 $f(x)\to\infty$이므로 y축은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.

$x\to-\infty$일 때, $e^x\to 0(e^x>0)$이므로 $f(x)\to 0$ $(f(x)>0)$이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$는 ∞의 상태에서 감소한 후에 증가하여 ∞의 상태가 되므로 극솟값을 갖는다. 이때, 극소점의 x좌표를 a라고 하자.

(28) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$



영역: 제1사분면, 제4사분면
대칭성: ×
정점: ×
증가감소, 극대극소, 변곡점, 점근선:
$x\to\infty$일 때, $x \gg \ln x$이므로 $f(x)\to\infty$이다.
$x\to1+$일 때, $\ln x\to0(\ln x>0)$에서 $f(x)\to\infty$이므로 직선 $x=1$은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.
$x\to1-$일 때, $\ln x\to0(\ln x<0)$에서 $f(x)\to-\infty$이므로 직선 $x=1$은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다.
$x\to0+$일 때, $\dfrac{1}{\ln x}\to0(\dfrac{1}{\ln x}<0)$이므로 $f(x)\to0(f(x)<0)$이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 제4사분면에서 원점에 한없이 가까워진다.
구간 $(1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 ∞의 상태에서 감소한 후에 증가하여 ∞의 상태가 되므로 극솟값을 갖는다. 이때, 극소점의 x좌표를 a라고 하자.

06

[풀이]

(1)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=x^{n-1}\{(n+1)x-n\}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{n}{n+1}$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=x^{n-2}\{(n^2+n)x-(n^2-n)\}$

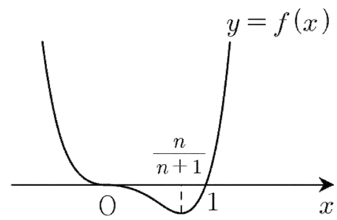
$f''(x)=0$에서

$x=0(n\geq3$인 경우) 또는 $x=\dfrac{n-1}{n+1}$

• n이 홀수인 경우

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	변곡점	↘
$\dfrac{n-1}{n+1}$	$\cdots$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\cdots$
$-$	$-$	0	$+$
0	$+$	$+$	$+$
변곡점	↘	극소	↗

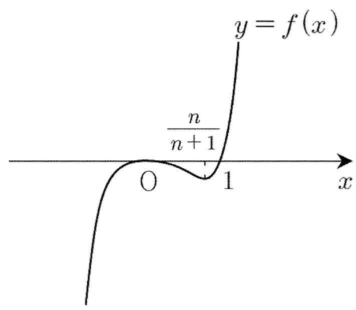
함수 $f(x)$의 그래프는



• n이 짝수인 경우

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$0(-)$	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘
$\dfrac{n-1}{n+1}$	$\cdots$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\cdots$
$-$	$-$	0	$+$
0	$+$	$+$	$+$
변곡점	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 그래프는



(2)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = -x^{n-1}(x-n)e^{-x}$

$f'(x) = 0$이면 $x = 0$ 또는 $x = n$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

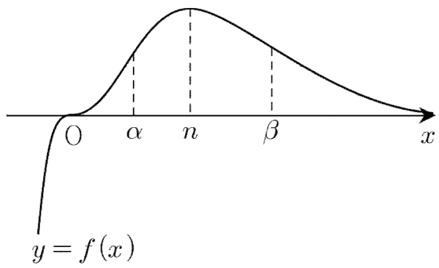
$f''(x) = x^{n-2}\{x^2 - 2nx + n(n-1)\}e^{-x}$

$f''(x) = 0$이면 $x = 0$ ($n \geq 3$인 경우)

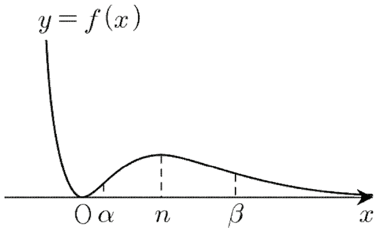
또는 $x = \alpha$ 또는 $x = \beta$

(단, $0 < \alpha < n < \beta$)

n이 홀수일 때, 함수 $f(x)$의 방정식은



n이 짝수일 때, 함수 $f(x)$의 방정식은



(3)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = x^{n-1}(x+n)e^{x}$

$f'(x) = 0$이면 $x = 0$ 또는 $x = -n$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

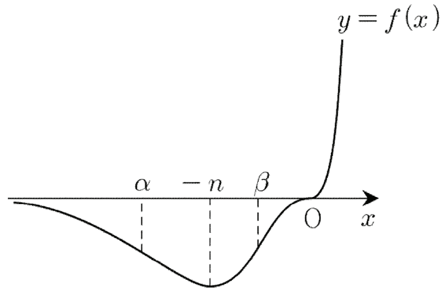
$f''(x) = x^{n-2}\{x^2 + 2nx + n(n-1)\}e^{x}$

$f''(x) = 0$이면 $x = 0$ ($n \geq 3$인 경우)

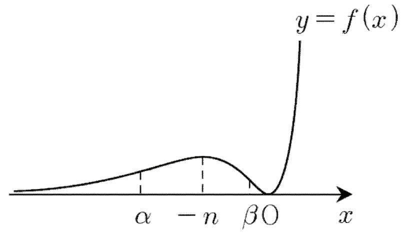
또는 $x = \alpha$ 또는 $x = \beta$

(단, $\alpha < -n < \beta < 0$)

n이 홀수일 때, 함수 $f(x)$의 방정식은



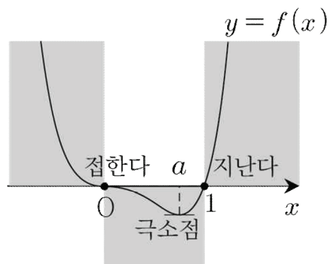
n이 짝수일 때, 함수 $f(x)$의 방정식은



[참고]

(1)

- n이 홀수인 경우



$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 짝수차수 다항함수이므로

$x \to \pm\infty$일 때, $f(x) \to \infty$이다.

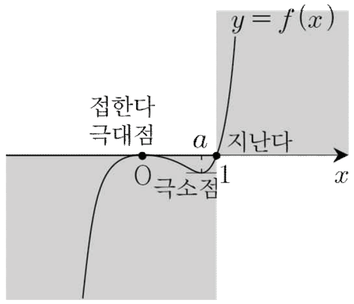
$f(x) = x(x-1) \cdot x^{n-1}(x^{n-1} \geq 0)$

이므로 $f(x)$의 부호는 $x(x-1)$의 부호와 같다.

따라서 곡선 $y = f(x)$는 위의 그림에서 어둡게 색칠된 영역을 지나며, 귀류법에 의하여 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 반드시 지난다. 이때, 곡선 $y = f(x)$는 원점에서 x축에 접한다.($\because x^n$에서 n이 3 이상의 홀수이기 때문이다.)

구간 $(0,\ 1)$에서 롤의 정리에 의하여 $f'(a) = 0$인 상수 a가 적어도 하나 이상 존재한다. (단, $0 < a < 1$) 이때, 점 $(a,\ f(a))$는 극소점이 된다.

- n이 짝수인 경우



$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 홀수차수 다항함수이므로

$x \to -\infty$일 때, $f(x) \to -\infty$이고,

$x \to \infty$일 때, $f(x) \to \infty$이다.

$f(x) = (x-1) \cdot x^n (x^n \geq 0)$

이므로 $f(x)$의 부호는 $x-1$의 부호와 같다.

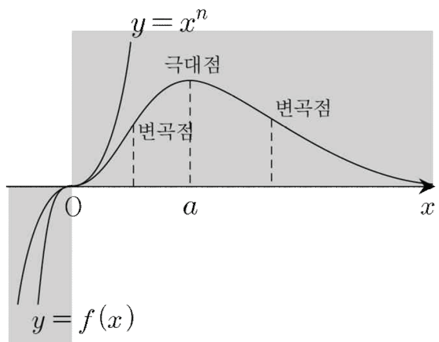
따라서 곡선 $y=f(x)$는 위의 그림에서 어둡게 색칠된 영역을 지나며, 귀류법에 의하여 점 $(1,\ 0)$을 반드시 지난다.

곡선 $y=f(x)$가 x축 아래쪽에서 원점을 지나므로 이 곡선은 원점에서 x축에 접한다.($\because x^n$에서 n이 2 이상의 짝수이기 때문이다.)

구간 $(0,\ 1)$에서 롤의 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 상수 a가 적어도 하나 이상 존재한다. (단, $0 < a < 1$) 이때, 점 $(a,\ f(a))$는 극소점이 된다.

(2)

- n이 홀수인 경우



$x \to 0$일 때, $e^{-x} \to 1$이므로 $f(x) \approx x^n$이다. 즉, 원점 부근에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^n$에 한없이 가까워진다.

곡선 $y=f(x)$는

곡선 $y=x^n$과 마찬가지로

구간 $(-h,\ 0)$에서 위로 볼록이고

구간 $(0,\ h)$에서 아래로 볼록이다.

(단, h는 충분히 작은 양수)

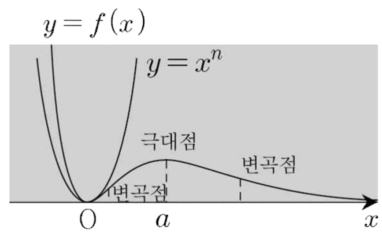
$x \to \infty$일 때, $f(x) \to 0 (f(x) > 0)$이므로 x축은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 제1사분면에서 x축에 한없이 가까워지므로 아래로 볼록이다.

구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 0에서 증가한 후에 감소하여 0에 한없이 가까워지므로 극댓값을 갖는다.

이때, 극대점의 x좌표를 a라고 하자.

구간 $(0,\ \infty)$에서 곡선 $y=f(x)$가 '아래로 볼록 $\to$ 위로 볼록 $\to$ 아래로 볼록' 으로 바뀌므로 이 곡선은 두 구간 $(0,\ a)$, $(a,\ \infty)$에서 각각 변곡점을 갖는다.

- n이 짝수인 경우



$x \to 0$일 때, $e^{-x} \to 1$이므로 $f(x) \approx x^n$이다. 즉, 원점 부근에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^n$에 한없이 가까워진다.

곡선 $y=f(x)$는

곡선 $y=x^n$과 마찬가지로

구간 $(-h,\ h)$에서 아래로 볼록이다.

(단, h는 충분히 작은 양수)

$x \to \infty$일 때, $f(x) \to 0 (f(x) > 0)$이므로 x축은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 제1사분면에서 x축에 한없이 가까워지므로 아래로 볼록이다.

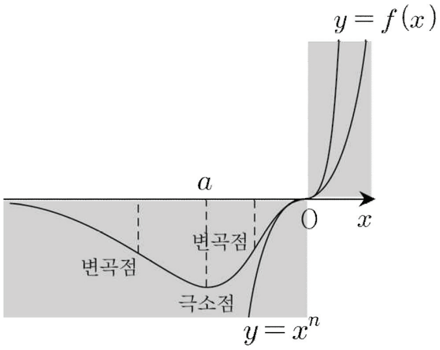
구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 0에서 증가한 후에 감소하여 0에 한없이 가까워지므로 극댓값을 갖는다.

이때, 극대점의 x좌표를 a라고 하자.

구간 $(0,\ \infty)$에서 곡선 $y=f(x)$가 '아래로 볼록 $\to$ 위로 볼록 $\to$ 아래로 볼록' 으로 바뀌므로 이 곡선은 두 구간 $(0,\ a)$, $(a,\ \infty)$에서 각각 변곡점을 갖는다.

(3)

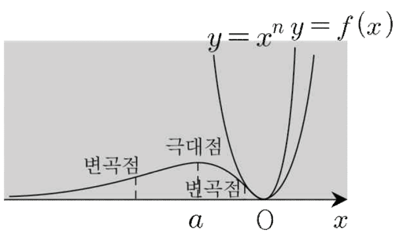
- n이 홀수인 경우



$x\to 0$일 때, $e^{-x}\to 1$이므로 $f(x)\approx x^n$이다. 즉, 원점 부근에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^n$에 한없이 가까워진다.
곡선 $y=f(x)$는

곡선 $y=x^n$과 마찬가지로
구간 $(-h,\ 0)$에서 위로 볼록이고
구간 $(0,\ h)$에서 아래로 볼록이다.
(단, h는 충분히 작은 양수)
$x\to -\infty$일 때, $f(x)\to 0(f(x)<0)$이므로 x축은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 제3사분면에서 x축에 한없이 가까워지므로 위로 볼록이다.
구간 $(-\infty,\ 0]$에서 함수 $f(x)$는 '0에 한없이 가까워지는 상태' 에서 감소한 후에 증가하여 0이 되므로 극솟값을 갖는다. 이때, 극소점의 x좌표를 a라고 하자.
구간 $(-\infty,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$가 '위로 볼록→아래로 볼록→위로 볼록' 으로 바뀌므로 이 곡선은 두 구간 $(-\infty,\ a)$, $(a,\ 0)$에서 각각 변곡점을 갖는다.

• n이 짝수인 경우



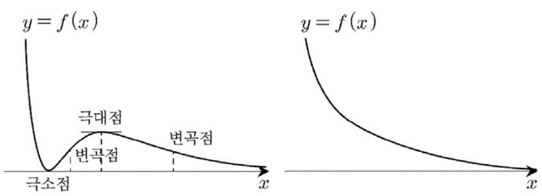
$x\to 0$일 때, $e^{-x}\to 1$이므로 $f(x)\approx x^n$이다. 즉, 원점 부근에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^n$에 한없이 가까워진다.
곡선 $y=f(x)$는

곡선 $y=x^n$과 마찬가지로
구간 $(-h,\ h)$에서 아래로 볼록이다.
(단, h는 충분히 작은 양수)
$x\to -\infty$일 때, $f(x)\to 0(f(x)>0)$이므로 x축은 점근선이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 제2사분면에서 x축에 한없이 가까워지므로 아래로 볼록이다.
구간 $(-\infty,\ 0]$에서 함수 $f(x)$는 '0에 한없이 가까워지는 상태' 에서 증가한 후에 감소하여 0이 되므로 극댓값을 갖는다. 이때, 극대점의 x좌표를 a라고 하자.
구간 $(-\infty,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$가 '아래로 볼록→위로 볼록→아래로 볼록' 으로 바뀌므로 이 곡선은 두 구간 $(-\infty,\ a)$, $(a,\ 0)$에서 각각 변곡점을 갖는다.

07

[풀이]
상수 a, b의 값에 관계없이 다음이 성립한다.

❶ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+ax+b}{e^x}=0$
(이때, $f(x)>0$)
이므로 곡선 $y=f(x)$는 제1사분면에서 x축에 한없이 가까워진다. 즉, x축이 점근선이다.
이때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다.
❷ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{t\to\infty}(t^2-at+b)e^t=\infty$
이므로 어떤 실수 p가 존재하여 구간 $(-\infty,\ p)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.
그런데 함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=(\text{이차식})\times e^{-x}$
이므로 곡선 $y=f(x)$의 극점의 개수는 0 또는 2이다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 추정할 수 있다.



왼쪽은 극점의 개수가 2인 경우이고,
오른쪽은 극점의 개수가 0인 경우이다.

다만 오른쪽은 도함수와 이계도함수를 이용하여 3개의 경우로 다시 구분할 수 있다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\{-x^2+(2-a)x+a-b\}e^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+(2-a)x+a-b=0 \cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=a^2-4b+4$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=\{x^2+(a-4)x+b-2a+2\}e^{-x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2+(a-4)x+b-2a+2=0 \cdots$ ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=a^2-4b+8(=D_1+4)$

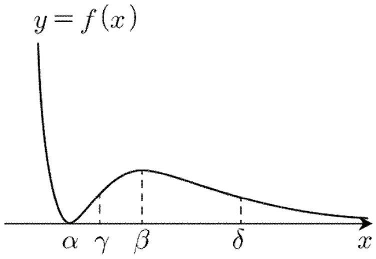
(1) $D_1>0$인 경우 (반드시 $D_2>0$이다.)

이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β,

이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근을 γ, δ

라고 하자. (단, $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$)

함수 $f(x)$의 그래프는



(2) $D_1=0$인 경우 (반드시 $D_2>0$이다.)

이차방정식 ㉠의 중근을 α,

이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근을 β, γ

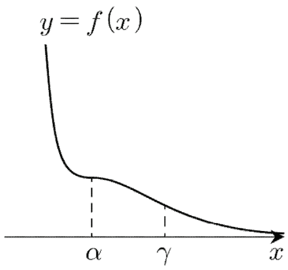
라고 하자. (단, $\beta<\gamma$)

이때, $\alpha=\beta$이다. ($\because$ [참고])

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이므로

함수 $f(x)$는 감소함수이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



(3) $D_1<0$인 경우

• $D_1<0$이고, $D_2>0$인 경우

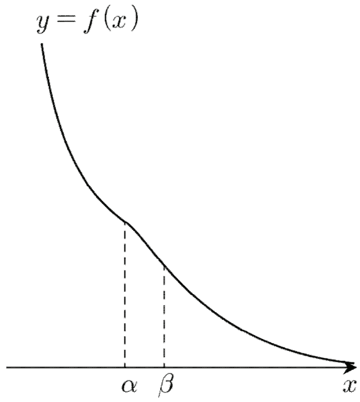
이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근을 α, β

라고 하자. (단, $\alpha<\beta$)

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로

함수 $f(x)$는 감소함수이다.

함수 $f(x)$의 그래프는

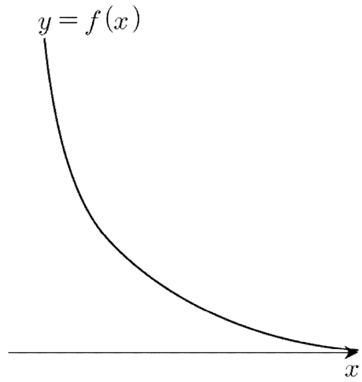


• $D_1<0$이고, $D_2\le 0$인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로

함수 $f(x)$는 감소함수이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



[참고]

(2)에서 $\alpha=\beta$인 이유는 다음과 같다.

$D_1=0$이면 $b=\dfrac{1}{4}a^2+1$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$-\left(x+\dfrac{a}{2}-1\right)^2=0$ 풀면 $\alpha=-\dfrac{a}{2}+1$

$b=\dfrac{1}{4}a^2+1$을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\left(x+\dfrac{a}{2}-1\right)\left(x+\dfrac{a}{2}-3\right)=0$

풀면 $\beta=-\frac{a}{2}+1$, $\gamma=-\frac{a}{2}+3$이므로 $\alpha=\beta$이다.

08

[풀이] ★

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$는 이계도함수를 가지므로

함수 $f(x)$와 $f'(x)$는 미분가능하고 연속이다.

▸ ㄱ. (참)

$f(-x)=-f(x)$

합성함수의 미분법에 의하여

$f'(-x)\times(-1)=-f'(x)$

정리하면

$f'(-x)=f'(x)$

▸ ㄴ. (거짓)

(반례)

예를 들어 원점에 대하여 대칭인 함수

$f(x)=x^3-x$

$f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-1$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 0}f'(x)=-1\neq 0$

▸ ㄷ. (거짓)

$f'(-x)=f'(x)$

합성함수의 미분법에 의하여

$f''(-x)\times(-1)=f''(x)$

정리하면

$f''(-x)=-f''(x)$ $\cdots(*)$

즉, 함수 $f''(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

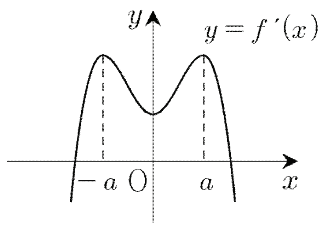
$f'(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지면

$x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

(*)에 의하여 $x=-a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

따라서 $f'(x)$는 $x=-a$에서 극댓값을 갖는다.

혹은 다음과 같이 생각해도 좋다.



도함수 $f'(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 도함수 $f'(x)$가 $x=a(a\neq 0)$에서 극댓값을 가지면 $x=-a$에서도 극댓값을 갖는다. (위의 그림은 $a>0$일 때의 경우이다. $a<0$일 때에도 마찬가지의 결과를 얻는다.)

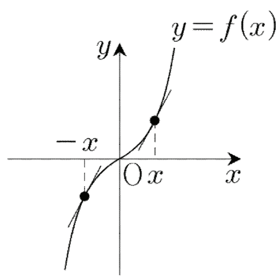
이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

[참고1]

ㄱ. (참)

문제에서 주어진 항등식에 의하여 함수 $f(x)$는 기함수, 즉 원점 대칭인 함수이다.



(위의 그림은 $x>0$인 경우)

위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기와 점 $(-x, f(-x))$에서의 접선의 기울기는 같다.

따라서 $x>0$일 때, $f'(-x)=f'(x)$이 성립한다.

마찬가지의 방법으로 $x<0$일 때, 위의 등식이 항상 성립함을 보일 수 있다.

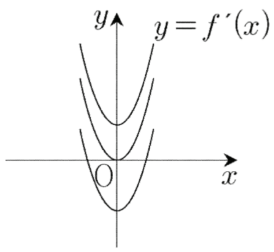
$x=0$이면 $-x=0$이므로 위의 등식은 성립한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여

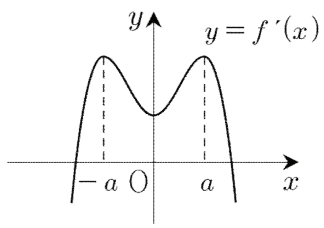
$f'(-x)=f'(x)$

ㄴ. (거짓)

보기 ㄱ에 의하여 함수 $f'(x)$는 우함수, 즉 y축 대칭인 함수이다.



위의 그림처럼 곡선 $y=f'(x)$가 원점을 지날 수도 있고, 지나지 않을 수도 있다.
만약 곡선 $y=f'(x)$가 원점을 지나는 경우만 그린다면 오판하게 되므로 가능한 모든 경우를 그려야 한다.
참고로 다음을 정리할 수 있다.
이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 기함수이면 함수 $f'(x)$는 우함수이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 원점을 반드시 지나지만 곡선 $y=f'(x)$는 원점을 반드시 지나는 것은 아니다. ($f(x)$가 이계도함수를 가지므로 함수 $f'(x)$는 연속함수이다.)
이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 우함수이면 함수 $f'(x)$는 기함수이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$가 원점을 반드시 지나는 것은 아니지만 곡선 $y=f'(x)$는 원점을 반드시 지난다. ($f(x)$가 이계도함수를 가지므로 함수 $f'(x)$는 연속함수이다.)
ㄷ. (거짓)



도함수 $f'(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 도함수 $f'(x)$가 $x=a(a\neq 0)$에서 극댓값을 가지면 $x=-a$에서도 극댓값을 갖는다. (위의 그림은 $a>0$일 때의 경우이다. $a<0$일 때에도 마찬가지의 결과를 얻는다.)

[참고2]
2009개정 교육과정에 맞추기 위하여 '이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$' 를 '다항함수 $f(x)$' 로 바꾸었습니다.
조건을 바꾼 이유는 다음과 같습니다.
2009개정 교육과정에서의 극값에 대한 정의는 다음과 같습니다.
극대: $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\leq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.
극소: $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 된다고 하고, $f(a)$를 극솟값이라고 한다.
(보기 ㄷ) 만약 함수 $f'(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에서 상수함수의 일부이면 함수 $f'(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖게 됩니다. 이때, $f'(a)$는 극댓값인 동시에 극솟값입니다. 그리고 함수 $f'(x)$는 $x=-a$에서 극값을 갖게 됩니다. 이때, $f'(-a)$는 극댓값인 동시에 극솟값입니다. 따라서 2009개정 교육과정에서 보기 ㄷ이 의미 있는 명제가 되기 위해서는 다음과 같이 변형되어야 합니다.
ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=a(a\neq 0)$에서 극값을 가지면 $f'(x)$는 $x=-a$에서 극값을 갖는다. (참)
그런데 '극대인 동시에 극소인 점' 에 대한 문제는 아직 수능에서 출제된 적이 없으므로, $f(x)$가 다항함수인 경우로 한정지은 것입니다. 함수 $f(x)$가 다항함수이면 극대점이 극소점일 수 없고, 극소점이 극대점일 수 없기 때문입니다.

09

[풀이] ★
▸ ㄱ. (거짓)
(반례)
$f(x)=-x^2$으로 두자.
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖지만
함수 $|f(x)|=x^2$은 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
▸ ㄴ. (참)
함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.
따라서 충분히 작은 $|h|$에 대하여
$h>0$이면 $f'(h)<0$

$h<0$이면 $f'(h)>0$

함수 $f(|x|)$에 대하여

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$\{f(|x|)\}'=\begin{cases} f'(x) & (x>0) \\ -f'(-x) & (x<0) \end{cases}$$

충분히 작은 $|h|$에 대하여

$h>0$이면 $f'(|h|)=f'(h)<0$

$h<0$이면 $f'(|h|)=-f'(-h)>0$

함수 $f(|x|)$는 $x=0$에서 극댓값을 가진다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

$g(x)=f(x)-x^2|x|$로 두자.

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-x^3 & (x\ge 0) \\ f(x)+x^3 & (x<0) \end{cases}$$

미분하면

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x)-3x^2 & (x>0) \\ f'(x)+3x^2 & (x<0) \end{cases}$$

충분히 작은 $|h|$에 대하여

$h>0$이면 $g'(h)=f'(h)-3h^2<0$

$h<0$이면 $g'(h)=f'(h)+3h^2>0$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가진다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

ㄱ. (거짓)

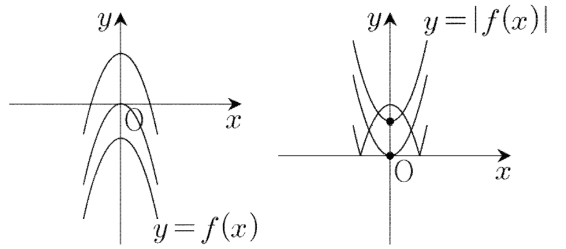
주어진 수 $|f(0)|$에서 다음의 세 경우를 생각해야 한다.

$f(0)>0$, $f(0)=0$, $f(0)<0$

이 세 경우에 대하여 두 곡선

$y=f(x)$, $y=|f(x)|$

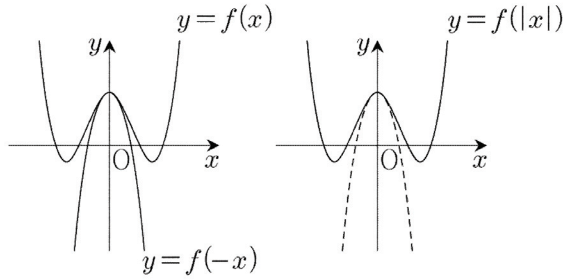
을 그리면 다음과 같다.



위의 그림에서 $f(0)\le 0$일 때, 함수 $|f(x)|$은 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. (참)

예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같다고 하자.



함수 $f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면 함수 $f(-x)$의 그래프와 일치한다.

따라서 함수

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

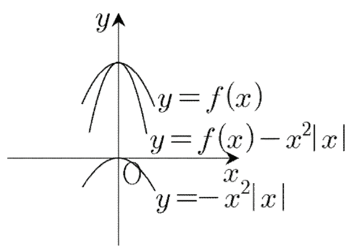
의 그래프는 위와 같다.

이때, 함수 $f(|x|)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. (참)

$$-x^2|x|=\begin{cases} -x^3 & (x\ge 0) \\ x^3 & (x<0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=-x^2|x|$의 그래프는 아래와 같다.

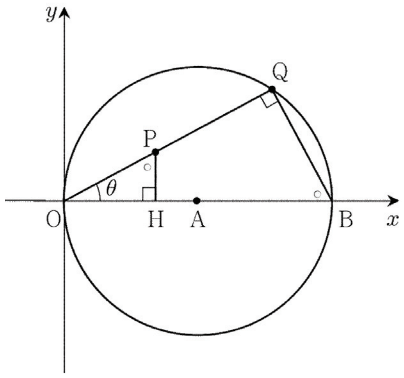


두 함수 $y=f(x)$, $y=-x^2|x|$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 이 두 함수를 합해서 만든 함수 $y=f(x)-x^2|x|$도 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. (위의 그림)

10

[풀이1]

문제에서 주어진 원이 x축과 만나는 두 점 중에서 원점이 아닌 점을 B, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{OB}$는 문제에서 주어진 원의 지름이므로

원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$\angle BQO = \frac{\pi}{2}$

삼각형의 세 내각의 합은 π이므로

두 직각삼각형 OPH와 OBQ에 대하여

$\angle OPH = \angle OBQ = \frac{\pi}{2} - \theta$

따라서 두 삼각형 OPH와 OBQ는 AA닮음이다.

직각삼각형 OBQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OQ} = \overline{BO}\cos\theta = 2\cos\theta$

직각삼각형 OPH의 빗변의 길이를 구하면

$\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ} = 2\cos\theta - 1$

직각삼각형 OPH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{PH} = \overline{OP}\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$

선분 PH의 길이가 점 P의 y좌표이므로

점 P의 y좌표를 $f(\theta)$로 두면

$f(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)

함수 $f(\theta)$의 도함수는

$f'(\theta) = 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta - \cos\theta$

$= 4\cos^2\theta - \cos\theta - 2$($\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$)

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)

함수 $f(\theta)$의 이계도함수는

$f''(\theta) = -8\cos\theta\sin\theta + \sin\theta$

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)

$f'(\theta) = 0$으로 두고 $\cos\theta$에 대한 이차방정식을 풀자.

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{1}{2} < \cos\theta < 1$이므로

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$

이때,

$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} = \frac{1+\sqrt{25}}{8} < \frac{1+\sqrt{33}}{8} < \frac{1+\sqrt{36}}{8}$

$= \frac{7}{8} < 1$

$\cos\theta$가 $\frac{1-\sqrt{33}}{8}$의 값을 가질 수 없는 이유는

$-\frac{5}{8} = \frac{1-\sqrt{36}}{8} < \frac{1-\sqrt{33}}{8} < \frac{1-\sqrt{25}}{8}$

$= -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$인 θ의 값을 θ_0라고 하자.

$f''(\theta_0) = \sin\theta_0(1 - 8\cos\theta_0) = -\sqrt{33}\sin\theta_0 < 0$

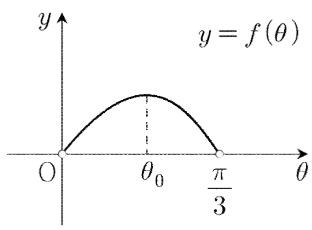
($\because 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{3}$일 때, $\sin\theta_0 > 0$)

$f'(\theta_0) = 0$, $f''(\theta_0) < 0$이므로

함수 $f(\theta)$는 $\theta = \theta_0$일 때, 극댓값을 갖는다.

그런데 $\lim_{\theta \to 0+} f(\theta) = 0$, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}-} f(\theta) = 0$이므로

함수 $f(\theta)$는 $\theta = \theta_0$일 때, 최댓값을 갖는다.



$\therefore\ a = 1,\ b = 33,\ a + b = 34$

답 34

[참고1]

아래와 같은 방법으로 선분 PH의 길이를 구해도 좋다.

직각삼각형 OBQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{BQ}=\overline{OB}\sin\theta=2\sin\theta$, $\overline{OQ}=\overline{BO}\cos\theta=2\cos\theta$

직각삼각형 OPH의 빗변의 길이를 구하면

$\overline{OP}=\overline{OQ}-\overline{PQ}=2\cos\theta-1$

서로 닮은 두 삼각형 OPH와 OBQ에 대하여

$\overline{OP}:\overline{PH}=\overline{OB}:\overline{BQ}$

즉, $(2\cos\theta-1):\overline{PH}=2:2\sin\theta$

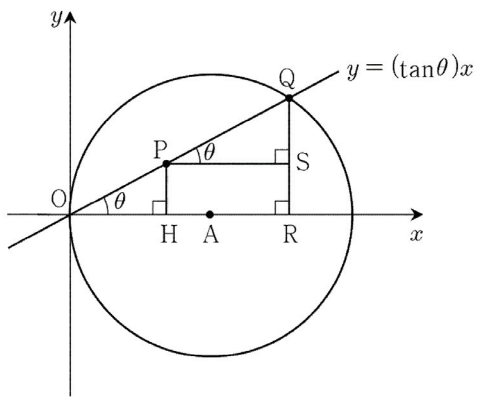
정리하면

$\overline{PH}=$(점 P의 y좌표)$=2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta$

[참고2]

점 P의 y좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.

두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, R, 점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 S라고 하자.



문제에서 주어진 원의 방정식은

$(x-1)^2+y^2=1$

과 직선 OQ의 방정식은

$y=(\tan\theta)x$

이 원과 직선의 방정식을 연립하면

$(x-1)^2+(\tan^2\theta)x^2=1$

좌변을 전개하여 정리하면

$(\sec^2\theta)x^2-2x=0$ ($\because \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$)

좌변을 인수분해하면

$x(x\sec^2\theta-2)=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$일 때, $\sec\theta\neq 0$이므로

이 이차방정식을 풀면

$x=0$ 또는 $x=2\cos^2\theta$($\because \cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$)

점 Q의 x좌표는 $2\cos^2\theta$이다.

이를 직선 OQ의 방정식에 대입하면

$y=2\cos\theta\sin\theta$

따라서 점 Q의 좌표는

$Q(2\cos^2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta)$ 즉, $\overline{QR}=2\cos\theta\sin\theta$

직각삼각형 QPS에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{QS}=\overline{PQ}\sin\theta=\sin\theta$이므로

$\overline{SR}=\overline{QR}-\overline{QS}=2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta$

직사각형 PHRS에서

$\overline{PH}=\overline{SR}=2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta$

점 P의 y좌표는 $2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta$이다.

[참고3]

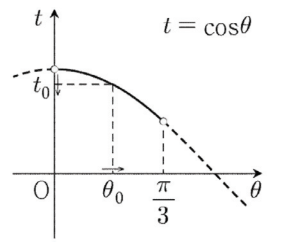
이계도함수를 이용하지 않고(즉, 도함수만을 이용하여), 함수 $f(\theta)$가 $\theta=\theta_0$에서 극댓값을 가짐을 보이자.

$\cos\theta=t$, $g(t)=f'(\theta)$로 두면

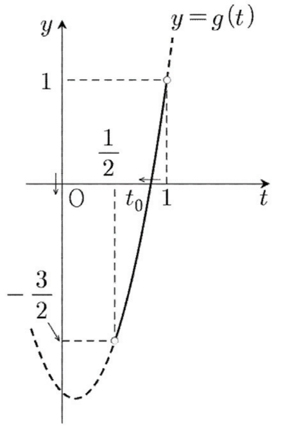
$g(t)=4t^2-t-2$(단, $\dfrac{1}{2}<t<1$)

그리고 $t_0=\cos\theta_0$로 두자. 이때, θ_0에 대하여 t_0는 유일하게 결정된다. (아래 그림)

두 함수 $t=\cos\theta$, $y=g(t)$의 그래프는

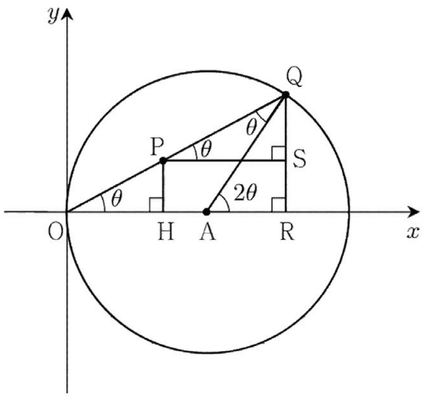


위의 그림처럼 θ가 θ_0 보다 작은 값을 갖다 큰 값을 갖도록 변하면, t는 t_0 보다 큰 값을 갖다 작은 값을 갖도록 변한다.

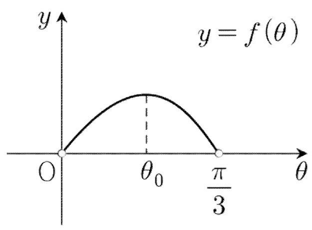


위의 그림처럼 t가 t_0 보다 큰 값을 갖다 작은 값을 갖도록 변하면, $g(t)$는 양수에서 음수로 바뀐다.
요컨대 $\theta=\theta_0$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로, 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 극댓값을 갖는다.

[풀이2] ※ 삼각함수의 배각의 공식을 이용한 풀이입니다. (교육과정 외)
두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, R, 점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 S라고 하자.



원의 정의에 의하여
$\overline{OA}=\overline{AQ}$
이등변삼각형 OAQ에서
$\angle AQO=\theta(=\angle AOQ)$
삼각형 OAQ의 꼭짓점 A에서의 외각은
$\angle QAR=2\theta$
두 직각삼각형 QAR과 QPS에서
삼각비의 정의에 의하여
$\overline{QR}=\overline{AQ}\sin 2\theta=\sin 2\theta$, $\overline{QS}=\overline{PQ}\sin\theta=\sin\theta$
이므로
$\overline{SR}=\overline{QR}-\overline{QS}=\sin 2\theta-\sin\theta$
직사각형 PHRS에서
$\overline{PH}=\overline{SR}=\sin 2\theta-\sin\theta$
점 P의 y좌표를 $f(\theta)$로 두면
$f(\theta)=\sin 2\theta-\sin\theta$(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)
함수 $f(\theta)$의 도함수는
$f'(\theta)=2\cos 2\theta-\cos\theta$
$=4\cos^2\theta-\cos\theta-2$(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)
($\because$ 삼각함수의 배각의 공식)
함수 $f(\theta)$의 이계도함수는
$f''(\theta)=-8\cos\theta\sin\theta+\sin\theta$
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)
$f'(\theta)=0$으로 두고 $\cos\theta$에 대한 이차방정식을 풀자.
$0<\theta<\frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{1}{2}<\cos\theta<1$이므로
이차방정식의 근의 공식에 의하여
$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$
이때,
$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}=\frac{1+\sqrt{25}}{8}<\frac{1+\sqrt{33}}{8}<\frac{1+\sqrt{36}}{8}$
$=\frac{7}{8}<1$
$\cos\theta$가 $\frac{1-\sqrt{33}}{8}$의 값을 가질 수 없는 이유는
$-\frac{5}{8}=\frac{1-\sqrt{36}}{8}<\frac{1-\sqrt{33}}{8}<\frac{1-\sqrt{25}}{8}$
$=-\frac{1}{2}$
$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$인 θ의 값을 θ_0라고 하자.
$f''(\theta_0)=\sin\theta_0(1-8\cos\theta_0)=-\sqrt{33}\sin\theta_0<0$
($\because$ $0<\theta_0<\frac{\pi}{3}$일 때, $\sin\theta_0>0$)
$f'(\theta_0)=0$, $f''(\theta_0)<0$이므로
함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$일 때, 극댓값을 갖는다.
그런데 $\lim_{\theta\to 0+}f(\theta)=0$, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}-}f(\theta)=0$이므로
함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$일 때, 최댓값을 갖는다.



$\therefore$ $a=1$, $b=33$, $a+b=34$
답 34

11

[풀이] ★

우선 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 두 점을 지난다.

$\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $(3,\ \pi)$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 변곡점을 갖지 않는다.

다항함수 $f''(x)$는 연속함수이므로 $f''(1)$의 부호가 음일 수 없다. 즉, $f''(1) \geq 0$이다.

$x=1$에서 함수 $f(x)$가 아래로 볼록이고 $f'(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

문제에서 주어진 표를 완성하면

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	1
$f''(x)$	$+$	0 또는 $+$	$+$	0
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π

아래를 만족시키는 적당한 상수 $p(<1)$을 생각하자.

구간 $(p,\ 3)$에서 $f''(x) \geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(p,\ 3)$에서 아래로 볼록하다.

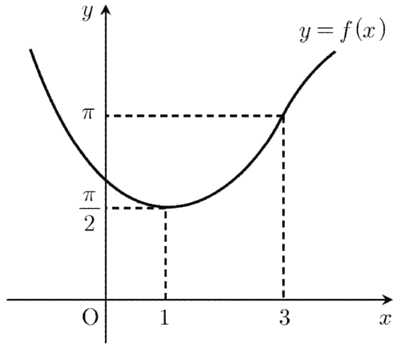
구간 $(p,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(p,\ 1)$에서 감소한다.

구간 $(1,\ 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(1,\ 3)$에서 증가한다.

점 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$는 함수 $f(x)$의 극소점이다.

$x>3$일 때, $f''(x)$의 부호에 대한 정보가 없으므로 점 $(3,\ \pi)$가 함수 $f(x)$의 변곡점이라고 단정할 수 없다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그리면



▸ ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 도함수는

합성함수의 미분법에 의하여

$g'(x)=f'(x)\times\cos(f(x))$

$\therefore\ g'(3)=f'(3)\times\cos(f(3))$

$=1\times\cos\pi=-1$

▸ ㄴ. (참)

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

구간 $(1,\ 3)$에서

$0<f'(x)<1$

$\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$에서

$-1<\cos(f(x))<0$

보기 ㄱ에서

$g'(x)=f'(x)\times\cos(f(x))$이므로

$-1<g'(x)<0$

함수 $g(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$

인 c가 구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

구간 $(1,\ 3)$에서 $-1<g'(x)<0$이므로

$-1<g'(c)<0$

$\therefore\ -1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-\{f'(x)\}^2\sin(f(x))+f''(x)\cos(f(x))$

충분히 작은 양수 h에 대하여

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서

$|f'(x)| \geq 0$, $\sin(f(x)) > 0$,

$f''(x) \geq 0$, $\cos(f(x)) \leq 0$이므로

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서

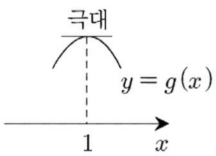
$g''(x) \leq 0$

(단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 변곡점으로 갖지 않는다.

물론 합성함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리면 $x=1$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 가짐을 알 수 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

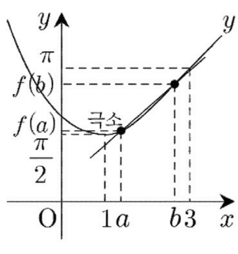
[참고]

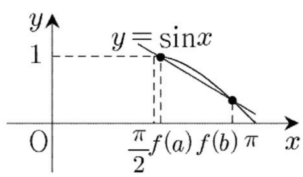
ㄱ. (참)

미분계수 $g'(3)$의 부호는 두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x$의 그래프의 개형을 그려서 두 미분계수 $f'(3)$(접선의 기울기), $\cos(f(3))$(접선의 기울기)의 부호로 결정하면 되지만, 미분계수 $g'(3)$의 값은 함수 $g(x)$의 도함수에 $x=3$을 대입해서 구해야한다. 즉, 대수적인 방법을 따라야 한다.

ㄴ. (참)

두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x\left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right)$의 그래프는 다음과 같다.





위의 그림에서

(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기)

$$< \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$<$(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ \pi)$에서의 접선의 기울기)

즉, $0 < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1$ $\cdots$ ㉠

위의 그림에서

(곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기)

$$< \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$$

$<$(곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기)

즉, $-1 < \dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} < 0$ $\cdots$ ㉡

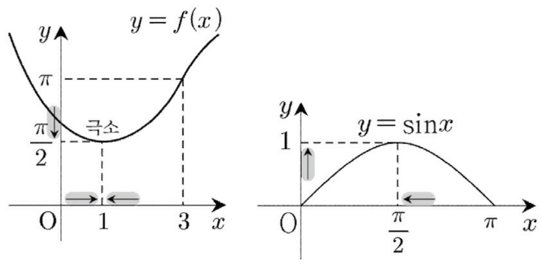
㉠, ㉡에 의하여

$$-1 < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} < 0$$

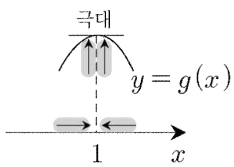
$$\therefore\ -1 < \frac{g(b)-g(a)}{b-a} < 0$$

ㄷ. (거짓)

두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x(0 \leq x \leq \pi)$의 그래프는 다음과 같다.



$x=1$을 포함한 어떤 구간에서 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 극대점이므로 변곡점이 될 수 없다.

12

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

조건 (나)에서 주어진 항등식을 변형하면

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

조건 (가)에 의하여 $f(x)\neq 1$이므로

$f(-x)\neq -1$

$x=-t$로 두고 위의 식을 정리하면

$f(t)\neq -1$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\neq -1$

▸ ㄴ. (거짓)

조건 (다)에서 주어진 항등식을 변형하면

$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$ ($\because$ 조건(나))

모든 실수 x에 대하여

$f(x)\neq 1$이고 $f(x)\neq -1$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이다.

조건 (나)에서 주어진 항등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(0)=0$ 즉, $f(0)=0$

조건 (다)에서 주어진 항등식에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에 대하여

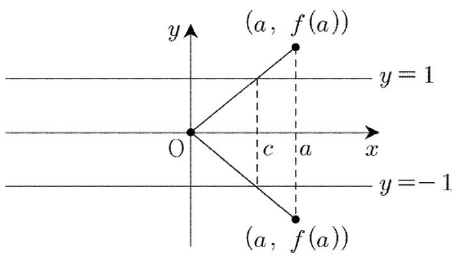
$f'(a)<0$라고 가정하자. (단, $a>0$)

조건 (다)에서 주어진 항등식에 $x=a$를 대입하면

$f'(a)=\{1+f(a)\}\{1-f(a)\}<0$

부등식을 풀면

$f(a)<-1$ 또는 $f(a)>1$



함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 연속이고

$f(0)\neq f(a)$이므로, 사이값 정리에 의하여

$f(c)=-1$ ($f(a)<-1$인 경우)

또는

$f(c)=1$ ($f(a)>1$인 경우)

인 c가 열린구간 $(0,\ a)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 이는 가정에 모순이다.

따라서 양의 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이다.

마찬가지의 방법으로

음의 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이다.

실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 증가함수이다.

이때, $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,-1<y<1\}$이다.

▸ ㄷ. (거짓)

조건 (다)에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여

함수 $f(x)$의 이계도함수를 구하면

$f''(x)=-2f(x)f'(x)$

$f'(x)>0$이므로

$f''(x)=0$과 필요충분조건은 $f(x)=0$이다.

그런데 $f(x)$는 증가함수이므로

구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $f(x)<0$이고,

구간 $(0,\ \infty)$에서 $f(x)>0$이다.

방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=0$이므로

방정식 $f''(x)=0$의 실근은 $x=0$이다.

$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 변곡점을 가진다.

이때, 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고, 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

[참고1] +미적분2(여러 가지 함수의 부정적분)

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

조건 (다)에서 주어진 항등식을 변형하면

$$\frac{f'(x)}{1+f(x)}+\frac{f'(x)}{1-f(x)}=2$$

$$\int\frac{f'(x)}{1+f(x)}dx+\int\frac{f'(x)}{1-f(x)}dx=\int 2dx$$

$\ln|1+f(x)|-\ln|1-f(x)|=2x+C\cdots(*)$

(단, C는 적분상수)

(*)에 $x=0$을 대입하면

$\ln|1+f(0)|-\ln|1-f(0)|=C$ 풀면 $C=0$

이를 (*)에 대입하면

$\ln|1+f(x)|-\ln|1-f(x)|=2x$

정리하면

$$\ln\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right|=2x$$

로그의 정의에 의하여

$$\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right|=e^{2x}$$

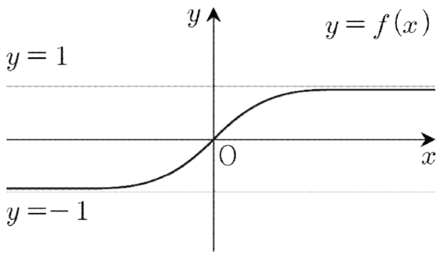
그런데 $-1<f(x)<1$이므로

$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=e^{2x}$$

정리하면

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[참고2]

점 $(0,\ f(0))$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 됨을 다음과 같이 보일 수도 있다.

함수 $f''(x)$의 도함수는

$f'''(x)=-2(f'(x))^2-2f(x)f''(x)$

$f''(0)=-2f(0)f'(0)=0$이고,

$f'''(0)=-2(f'(0))^2-2f(0)f''(0)=-2$

이므로 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 변곡점을 갖는다.

[참고3]

문제에서 주어진 세 조건을 '함수의 그래프의 개형을 그리는 순서'의 관점에서 정리하자.

• 정의역, 치역

조건 (가)에서 치역에는 1이 포함되지 않는다.

그런데 조건 (나)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 치역에는 -1이 포함되지 않는다.

• 좌표축과의 교점

조건 (나)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. 따라서 이 곡선은 원점을 반드시 지난다. ($\because$ 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 연속이기 때문이다.)

• 증가감소/극대극소

미분가능한 함수 $f(x)$의 증가감소/극대극소는 도함수 $f'(x)$의 부호로 따진다. 따라서 조건 (다)에서 주어진 등식에서 $f'(x)$의 부호를 따져야 한다.

즉, 조건 (다)에서 주어진 등식을

$f'(x)>0,\ f'(x)=0,\ f'(x)<0$

의 세 경우로 나누어 접근하면 된다.

자세한 설명은 [풀이]를 참고하고, 결론만 쓰면 다음과 같다.

귀류법에 의하여 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

이때, $f(x)$의 치역은 $\{y\mid -1<y<1\}$이다.

• 변곡점

우선 기하학적 관점에서 생각하면 다음과 같다.

$x\to\infty$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=1$의 아래쪽에서 이 직선에 한없이 가까워지므로 위로 볼록이다.

$x\to-\infty$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-1$의 위쪽에서 이 직선에 한없이 가까워지므로 아래로 볼록이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 반드시 변곡점을 가져야 한다.

그런데 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하면서 원점을 지나므로 이 곡선의 변곡점은 원점밖에 없다. (그렇지 않은 예를 하나 들어보면. 곡선 $y=f(x)$가 2개의 극점을 가지면 아래로 볼록$(-\infty)\to$변곡점$\to$위로 볼록(극대점포함)$\to$(원점/변곡점)$\to$아래로 볼록(극소점포함)$\to$변곡점$\to$위로 볼록(∞)이므로 변곡점의 개수는 3이다.)

시험장에서는 위의 기하학적 풀이가 빠르므로 실전적이다. 다만 이계도함수의 부호를 이용한 대수적인 방법으로 증명해야 안심이 된다.

• 점근선

두 직선 $y=1,\ y=-1$이 점근선이다.