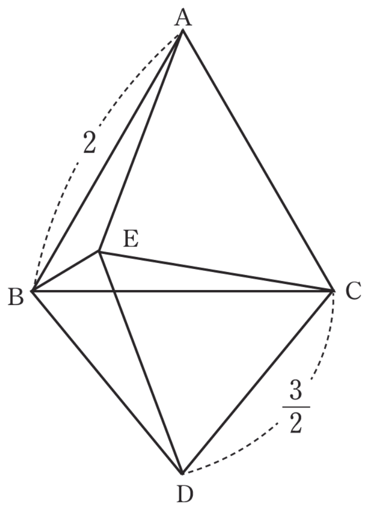
오르비
수학
N제

smart is sexy

Orbi

08 〈Idea〉

그림과 같이 두 정삼각형 ABC, EDC의 한 변의 길이는 각각 2, $\frac{3}{2}$이고 두 선분 DB, DE의 길이가 같다.



〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 다섯 점 A, B, C, D, E는 모두 한 평면 위에 있다.)

[4점]

〈보기〉

ㄱ. 두 삼각형 ACE, BCD는 합동이다.

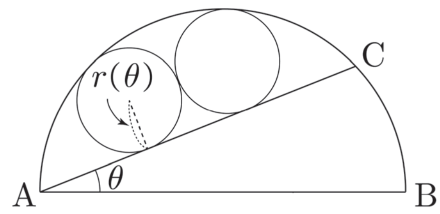
ㄴ. $\angle \mathrm{ABE} = \frac{\pi}{6}$

ㄷ. $\sin \angle \mathrm{BEC} = \frac{2}{3}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 $\angle \mathrm{BAC} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$가 되도록 점 C를 잡는다. 서로 외접하고 반지름의 길이가 $r(\theta)$로 같은 두 원이 모두 호 AC와 선분 AC에 접할 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{r(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}$의 값을 a라 하자. $100a$의 값을 구하시오. [4점]



10 <Idea>

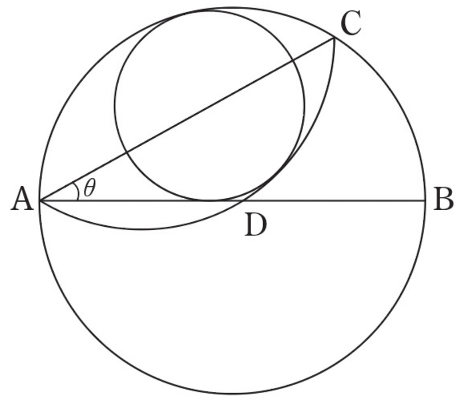
$0 < k < \frac{\pi}{2}$인 상수 k와 실수 t에 대하여 직선 $y = t$와 곡선 $y = \sin x - (\cos k)x$ 가 만나는 점의 개수가 t의 값에 상관없이 항상 5일 때, $\tan k - k$의 값은? [4점]

① $\frac{7}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{3}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ π

11

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. $\angle \mathrm{CAB} = \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$를 만족시키는 원 위의 점 C와 A를 이은 선분 AC에 의해 잘린 원의 두 부분 중 작은 부분을 선분 AC에 대하여 대칭시킨 도형이 선분 AB와 만나는 점을 D라 할 때, 선분 AB와 두 호 AC, CD에 동시에 접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. [4점]



28 〈Killer〉

$0 < a < 1$이고 $b > 0$인 두 상수 $a,\ b$와 함수
$f(x) = ax^2 + bx - \{\ln(|x|+1)\}^2$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$ 라 하자. 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ g(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(t) = \alpha + \ln\beta$ 이다. $\alpha + \beta$의 값을 구하시오. (단, $2 < e$이고 α와 β는 유리수이다.)

[4점]

집합 $S = \{x \mid h'(x) = m\}$의 원소의 개수가 2가 되도록 하는 실수 m의 값은 오직 0 뿐이며, 이 때 집합 S는 $\{1,\ k\}$이다.

07 정답 : ⑤

점 A 와 점 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$ 이라 하자. $\overline{\mathrm{PB}}=2\overline{\mathrm{PA}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BB}'}=2\overline{\mathrm{AA}'}$
($\because$ $\triangle$PAA$'$, $\triangle$PBB$'$은 AA닮음) 이고 두 점 A 와 B 는 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점이므로 점 A 의 x 좌표를
a $(0<a<5)$라 하면 점 B 의 x 좌표는 a^2 이다.
또한 $\overline{\mathrm{PB}'}=2\overline{\mathrm{PA}'}$ 이므로 $a^2-5=2(5-a)$ $a^2+2a-15=0$, $(a+5)(a-3)=0$ $\therefore a=3$

점 B 의 좌표가 B$(9,\ 2)$ 이므로 $m=\dfrac{1}{2}$이다.

08 정답 : ⑤

ㄱ. $\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{DC}}=\dfrac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}=2$, $\angle\mathrm{ACE}=\dfrac{\pi}{3}-\angle\mathrm{ECB}=\angle\mathrm{BCD}$ 이므로 $\triangle\mathrm{ACE}\equiv\triangle\mathrm{BCD}$ (SAS 합동)

(참)

ㄴ. ㄱ.의 합동에 의하여 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BD}}$ 이고

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{ED}}=\dfrac{3}{2}$ ($\because$ 이등변삼각형 BDE, 정삼각형 EDC) 이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{2}$이다.

그런데 $\overline{\mathrm{EC}}$ 역시 $\dfrac{3}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{AE}}$.

이는 직선 BE가 $\angle\mathrm{ABC}$를 이등분함을 뜻한다.

따라서 ㄴ. 역시 (참)

(혹은 위의 조건들로부터 두 삼각형 ABE, CBE의 SSS 합동을 통해 $\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{CBE}$임을 알 수 있다.)

ㄷ. $\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{BED}+\angle\mathrm{CED}=\angle\mathrm{BED}+\dfrac{\pi}{3}$이다.

$\triangle$BDE는 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{BED}=\angle\mathrm{EBD}=\dfrac{\pi}{6}+\angle\mathrm{CBD}$ 이다.

($\because$ ㄴ.에서 $\angle\mathrm{ABE}=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로 $\angle\mathrm{CBE}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$)

따라서 $\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{CBD}+\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\sin\angle\mathrm{BEC}=\cos\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$ 이다. (참)

09 정답 : 25

반원의 중심을 O, 조그만 원 두 개의 중심을 왼쪽에서부터 각각 O_1, O_2, 이 원 두 개의 접점을 D라 하자.
먼저 선분 OO_1의 길이는 $1-r(\theta)$이고 선분 O_1D의 길이는 $r(\theta)$이다.

또한 현 AC의 중점을 M이라 하면, 선분 OD의 길이는 두 선분 DM, MO의 길이의 합으로 나타낼 수 있는데, 두 선분의 길이가 각각 $r(\theta)$, $\sin\theta$이므로 선분 OD의 길이는 $r(\theta)+\sin\theta$이다.

직각삼각형 OO_1D에서 피타고라스의 정리를 적용시키면 $(1-r(\theta))^2=(r(\theta))^2+(r(\theta)+\sin\theta)^2$이고,
위 방정식을 $r(\theta)$에 대하여 정리하면
$r(\theta)=\sqrt{2+2\sin\theta}-(1+\sin\theta)$이다.

따라서 $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\dfrac{r(\theta)}{\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)^2}=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{\sqrt{2+2\cos t}-(1+\cos t)}{t^2}$이고,

분모와 분자에 $\sqrt{2+2\cos t}+(1+\cos t)$를 곱해서 유리화해준 후 극한값을 계산해주면 $\dfrac{1}{4}$이 나온다.

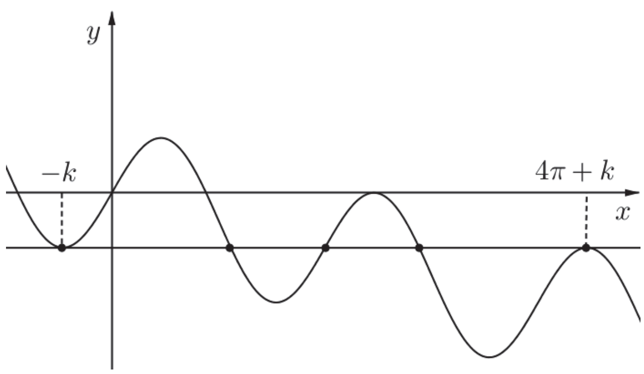
따라서 $100a=25$.

10 정답 : ②

$f(x)=\sin x-(\cos k)x$ 라 하자.

$f'(x)=\cos x-\cos k$ 이므로, 극대 또는 극소인 x 적어보면 $x=-k,\ k,\ 2\pi-k,\ 2\pi+k,\ 4\pi-k,\ 4\pi+k,\ \cdots$ 순으로 생긴다.
직선 $y=t$와 곡선 $y=\sin x-(\cos k)x$ 가 만나는 점의 개수가 t의 값에 상관없이 항상 5 라는 조건을 x축에 평행한 모든 직선이 $f(x)$와 5개의 만나는 점을 가진다는 것을 의미하므로, $f(x)$와 접하면서 x축과 평행한 어떤 직선은 다음과 같이 그려져야 한다.

(추가설명) $f(x+2\pi)=\sin x-(\cos k)(x+2\pi)=f(x)-2\pi\cos k$이므로
$f(x)$위에 어떤 점 $(a,\ b)$가 있다면 $f(x)$ 위에는 점 $(a+2\pi,\ b-2\pi\cos k)$도 반드시 있다는 것을 알 수 있다.
즉, 2π 간격으로 똑같은 그래프 모양이 y값은 전체적으로 $-2\pi\cos k$만큼 내려가면서 생겨남을 알 수 있겠다.



따라서 위와 같이 곡선이 생긴다면 $f(x)$와 접하면서 x축과 평행한 모든 직선은 곡선 $y=f(x)$와 5번 만나게 된다.
(그림에서 그려진 직선을 위아래로 움직여보자.)

따라서 $f(x)$가 극소일 때 $(x=-k)$그은 접선이 그 다음으로 생기는 3번째 극대인 점 $(x=4\pi+k)$에서 곡선 $y=f(x)$와 접할 때, 모든 실수 t에서 $g(t)=5$를 만족시킨다.

즉, $f(-k)=f(4\pi+k)$일 때 이므로 $\sin(-k)-(\cos k)(-k)=\sin(4\pi+k)-(\cos k)(4\pi+k)$이다.
이를 정리하면
$\sin k-k\cos k=2\pi\cos k$, $\cos k\neq 0$이고,
양변에 $\cos k$를 나누면 $\tan k-k=2\pi$임을 알 수 있다.

11 정답 : 2

두 호 AC, CD로 둘러싸인 도형은 선분 AC에 대하여 대칭인 도형이므로, 이 두 호에 동시에 접하는 작은 원 역시 선분 AC에 대하여 대칭이어야 한다. 이러한 사실은 작은 원의 중심이 선분 AC 위에 있음을 알려준다.

이 원의 중심을 O', 선분 AB를 지름으로 하는 큰 원의 중심을 O, 이 두 원의 접점을 E라 하자.
그러면 내접하는 두 원의 성질상 선분 OE 위에 O'이 있으므로 선분 OO'의 길이는 $1-r(\theta)$이다.

점 O'에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면, 이 점은 작은 원과 선분 AB의 접점과 동일한 점이다. 따라서
$\overline{\mathrm{O}'\mathrm{H}}=r(\theta)$.
삼각형 $\mathrm{OO}'\mathrm{H}$는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{1-2r(\theta)}$이고, 따라서 선분
$\overline{\mathrm{AH}}=1-\sqrt{1-2r(\theta)}$.

직각삼각형 AHO'에서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HO}'}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\dfrac{r(\theta)}{1-\sqrt{1-2r(\theta)}}$.
정리하면
$r(\theta)-\tan\theta=-\tan\theta\sqrt{1-2r(\theta)}$, 양변 제곱 후 $r(\theta)$에 대하여 정리하면

$\{r(\theta)\}^2-2(\tan\theta-\tan^2\theta)r(\theta)=0$이고, $r(\theta)\neq 0$이므로 $r(\theta)=2\tan\theta-2\tan^2\theta$.

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{2\tan\theta}{\theta}\times(1-\tan\theta)\right\}=2$ 이다.

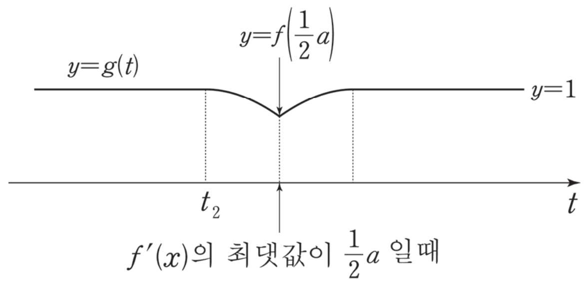
1) $\frac{1}{2}a \geq \frac{\pi}{4a}$ 인 경우

$f(f'(x))$ 의 최댓값은 여전히 1 이며 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 $g(t)=1$ 인 상수함수가 된다.

2) $\frac{1}{2}a \leq \frac{\pi}{4a}$ 인 경우

구간 $\left[t,\ t+\frac{4\pi}{3a}\right]$ 에서 $f'(x)$ 의 최댓값이 $\frac{\pi}{4a}$ 가 되도록 하는 실수 t 의 값을 t_2 라 하면

함수 $g(t)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



위의 그림처럼 $g(t)$ 는 한 점에서 미분불가능하고, 이 점은 2π 의 주기로 반복된다.

$a \leq \frac{\pi}{4a}$ 라면 위의 $a \geq \frac{\pi}{4a}$ 이고 $\frac{1}{2}a \leq \frac{\pi}{4a}$ 인 경우처럼

구간 $\left[t,\ t+\frac{4\pi}{3a}\right]$ 에서 $f'(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}a$ 가 되도록 하는 실수 t 에 대하여 미분불가능하다.

따라서 $\frac{1}{2}a \geq \frac{\pi}{4a}$ 이고 a 가 양수이므로 $a^2 \geq \frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서 $k^2 = \frac{1}{2}\pi$ 이므로 답은 3 이다.

28 정답 : 7

먼저 $f'(x)$ 를 구해 보자.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-\{\ln(-x+1)\}^2 & (x<0) \\ ax^2+bx-\{\ln(x+1)\}^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로

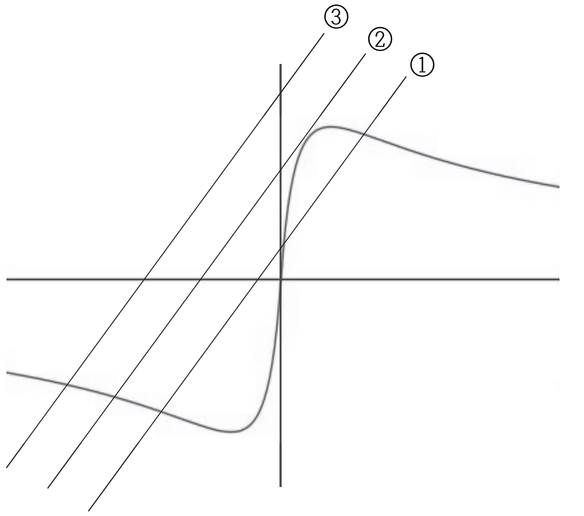
$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b-\dfrac{2\ln(-x+1)}{x-1} & (x<0) \\ 2ax+b-\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1} & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. $f(x)$ 는 $x=0$ 에서도 미분가능하고 $f'(0)=b$ 이다. $h'(x)$ 는 $x<t$ 에서는 $f'(x)$ 와 같고, $x \geq t$ 에서는 $f'(t)$ (상수)와 같다. 이제 $f'(x)$ 그래프의 개형을 확인하기 위해

$$y=\begin{cases} \dfrac{2\ln(-x+1)}{x-1} & (x<0) \\ \dfrac{2\ln(x+1)}{x+1} & (x>0) \end{cases}$$

를 $u(x)$ 라 두고, $u(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2ax+b$ 가 어떻게 만나는지 볼 수 있다.

$u(x)$는 원점 대칭인 기함수이며, $x>0$에서는 $x=e-1$에서 극댓값을 가지고, 극대가 된 이후에는 계속 감소하는 함수이다($\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$의 값은 알지 못하여도 된다).
그리고 a와 b는 양수이므로 $u(x)$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$는 아래의 [그림 1]과 같이 나타날 수 있다.
($x<0$인 구간에서는 반드시 1번 만난다.)
가능한 경우들을 ①, ②, ③으로 나누어 살펴보자.



[그림 1] $u(x)$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$

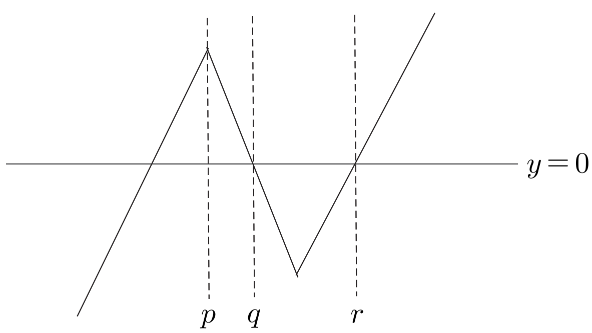
그 전에 중요한 것이 더 남아 있다. 문제에서 제시된 조건인 a의 범위 $0<a<1$은 문제를 해결하는 데에 매우 중요한 조건이다. $u(x)$의 도함수

$$u'(x)=\frac{2}{(|x|+1)^2}\{1-\ln(|x|+1)\}$$

는 y축에 대하여 대칭인 우함수이며,
$x=0$에서 최댓값 2를 갖는다.
a의 범위 $0<a<1$에 의해 직선 $y=2ax+b$의 기울기 $2a$가 2보다 작기 때문에, $f'(x)$는 두 개의 극값을 가지게 된다.
(참고로 이것은 ①, ②의 경우가 존재하기 위해서 필요한 조건이기도 하다.)

(1) ①의 경우

이 경우에 $f'(x)$의 그래프는 대략적으로 [그림 2]와 같이 나타난다.



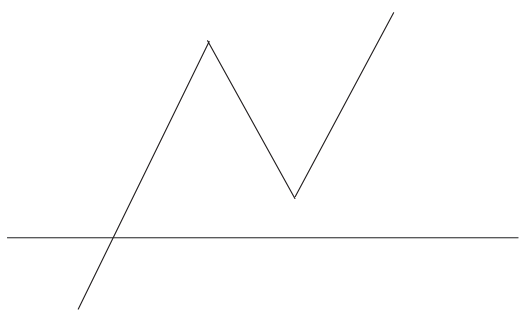
[그림 2] ①의 경우 $f'(x)$의 그래프, p는 $f'(x)$가 극대가 되는 x이고, q, r은 x절편이다.

이제, 표기의 편의상 $m=k$일 때 집합 S를 S_k라 하자.
(즉, $S_k=\{x \mid h'(x)=k\}$)

$h'(x)$는 $x<t$에서는 $f'(x)$와 같고, $x \geq t$에서는 $f'(t)$ (상수)와 같다는 사실을 다시 한 번 상기하자. 여기에서 S_0의 원소의 개수가 2가 되기 위해서는 t의 범위가 $q<t<r$이어야 한다. 그런데 $q<t<r$일 때에는 $f'(t)<m<f'(p)$인 임의의 m에 대하여 S_m의 원소의 개수가 2가 된다.

따라서 ①은 가능한 경우가 아니다.

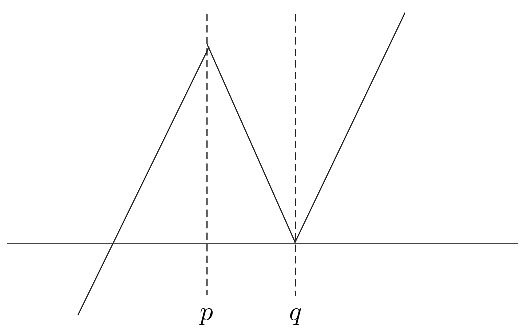
(2) ③의 경우
이 경우에 $f'(x)$의 그래프는 대략적으로 [그림 3]과 같이 나타난다.



[그림 3] ③의 경우 $f'(x)$의 증감을 나타낸 그래프

여기에서는 임의의 t에 대하여 S_0의 원소의 개수가 2가 될 수 없다.
따라서 ③은 가능한 경우가 아니다.

(3) ②의 경우
이 경우에 $f'(x)$의 그래프는 대략적으로 [그림 4]와 같이 나타난다.



[그림 4] ②의 경우 $f'(x)$의 그래프, p는 $f'(x)$가 극대가 되는 x이고, q는 x절편이다.

여기에서 S_0의 원소의 개수가 2가 되기 위해서는 t의 범위가 $t>q$이어야 한다. 그런데 $f'(t)<f'(p)$라면 $f'(t)<m<f'(p)$인 임의의 m에 대해 S_m의 원소의 개수가 2가 되어 0이 아닌 m 이 존재하여 모순이고 $f'(t)>f'(p)$라면 $m=f'(t)\,(\neq 0)$일 때 S_m의 원소의 개수가 2가 되도록 하는 0이 아닌 m이 존재하여 마찬가지로 모순이다.
따라서 $f'(t)=f'(p)$이어야 한다.

이것을 정리하면 다음과 같다.

직선 $y=2ax+b$는 $u(x)$의 그래프에 접해야 하며, $f'(t)=f'(p)$이어야 한다.

직선 $y=2ax+b$가 $u(x)$의 그래프에 접하는 것부터 고려해 보자. $S_0=\{1,\ k\}$이므로, 직선 $y=2ax+b$는 $x=1$, $x=k$에서 $u(x)$의 그래프와 만나며, $x=1$일 때 접하므로 $2a=u'(1)$이다. 여기서 e의 범위 $2<e$을 준 까닭을 알 수 있다. 접점의 x좌표는 $u(x)$가 극대가 되는 x인 $e-1$보다 작아야 하기 때문이다. 실제로 문제에서 준 접점의 x좌표인 1은 $e-1$보다 작다. $2a=u'(1)$이므로

$$u'(1)=\frac{1}{2}(1-\ln 2)=2a\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{4}(1-\ln 2)$$

이고, $2a+b=u(1)$이므로

$$u(1)=\ln 2=2a+b\ \Rightarrow\ b=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln 2$$

이다. 이로써 $f(x)$를 완전히 구하였다.

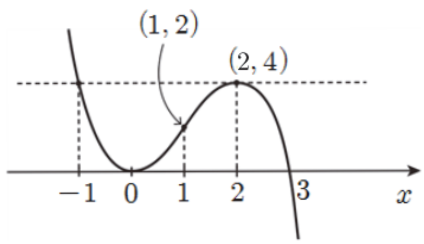
이제 $f'(t)=f'(p)$인 것을 생각해 보자. 여기서 p는 $f'(x)$가 극대가 되는 x라는 것을 다시 한 번 상기하자. 즉, $u'(x)=2a$를 만족시키는 1이 아닌 x이다. 그런데 $u'(x)$는 우함수이므로, $p=-1$이 됨을 바로 알 수 있다. 따라서

$$f'(t)=f'(-1)=-2a+b+\ln 2=-1+3\ln 2$$

이고 $\alpha=-1$, $\beta=2^3=8$이므로 $\alpha+\beta=7$이다.

29 정답 : 216

① 먼저 $f(x)=-x^3+3x^2$의 그래프를 그리자. 극점과 변곡점을 조사해 그려보면, $x=0$, 2에서 극점을 가지고, $x=1$에서 변곡점이다.



② 이제 어떤 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $t\geq-4$에서 주어진 $h(x)$의 관계식에 의해 다음 세 가지의 경우가 가능하다.

(1) $h(x)=f(x)$

(2) $h(x)=f(x-g(t))-t$

(3) $h(x)$가 $f(x)$, $f(x-g(t))-t$가 번갈아 나오기.

(a) (1)의 경우엔 조건 (다)에 모순이다.

(b) (2)의 경우엔, 일단 $f(x)$를 x축 방향으로 $g(t)$, y축 방향으로 $-t$만큼 평행이동 했다는 의미인데, 이것도 조건(다)에 모순이다.

(c) 따라서 번갈아 나오는 것 밖에 안된다.