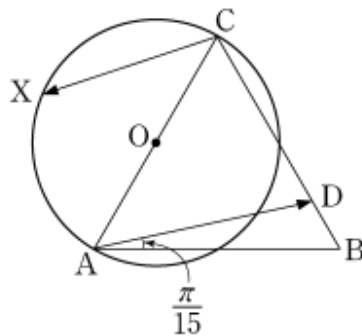


내적을 크기 크기 코사인 써타! 라고만 알고 계신분이 계시다면
이 문서를 꼭 봐주세요.

- 출처 : 한국교육과정 평가원 2011 수능 수리가형 출수형 22번 문제 -

22. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를
지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를
 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$ 가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때,
두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$ 의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 값이 최소가 되도록
하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을
구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



- 출처 : 한국교육과정 평가원 2011 수능 수리가형 출수형 22번 문제 -

이 문제는 '내적'의 정의를 제대로 알고 있는지 묻고 있는 문제입니다.
그와 동시에, 문제의 그림에서 '원의 지름'이 표시되면 어떤 '작업'을 해
야할 지에 대해 알려주는 문제입니다.

The diagram shows a circle with center \$O\$. Points \$A\$, \$B\$, and \$C\$ are on the circumference. Triangle \$ABC\$ is inscribed. Point \$D\$ lies on side \$BC\$ such that \$AD \perp BC\$. Point \$P\$ is located on the segment \$AD\$. The line segment \$CP\$ is extended to intersect the circle again at point \$X\$. An arc indicates that \$\angle BAC = \frac{\pi}{15}\$.

그래놓고 생각해 봅시다.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \theta$$

입니다. (내적의 정의)

교과서에 빠지지 않고 나오는 식입니다.

위 식에 괄호만 살짝 쳐보겠습니다.

$$(|\vec{A}| \cos \theta) \cdot |\vec{B}| \text{ 와 같습니다.}$$

즉 A와 B의 내적이란,

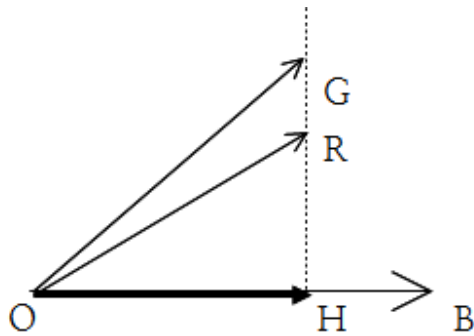
'B직선에 대한 A의 정사영의 길이' x 'B선분'의 크기 로도 해석 할 수 있습니다.

식에 '각도'에 관한 변수가 있었음에도 불구하고 방금 쓴 문장에 제가 '각도'라는 말을 언급했었나요?? 그런적 없었습니다!

이 말은 임의의 벡터들의 내적 값을 비교할 때, 여러분은 그들 간의 사이각(θ)을 몰라도 수직으로 찍힌 부분의 길이만 안다면 내적의 값을 비교하는 것이 가능하다는 사실을 알 수 있습니다.

말이 좀.. 어렵다고요?!!!

자, 아래 그림을 보면 쉽게 의미가 와닿으실겁니다.



그림을 보시면 임의의 세 벡터 $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OB}$ 에 대하여
 $\overrightarrow{OR}$ 과 $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각과, $\overrightarrow{OG}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각은 서로 다릅니
 다.

각각의 각도를 θ_1 과 θ_2 라고 가정해봅시다. (정확한 각도는 뭔지 모름)

($\overrightarrow{OR}$ 과 $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각 = θ_1 / $\overrightarrow{OG}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각 = θ_2)

따라서 다음과 같은 식이 성립합니다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OR}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta_1 \\ \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OG}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta_2\end{aligned}$$

그런데, 식 순서만 살짝 바꿔주면 동일한 식으로 표현 할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OB}| \times (|\overrightarrow{OR}| \cos \theta_1) = |\overrightarrow{OB}| \times |\overrightarrow{OH}| \\ \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OB}| \times (|\overrightarrow{OG}| \cos \theta_2) = |\overrightarrow{OB}| \times |\overrightarrow{OH}|\end{aligned}$$

결론적으로 내적 값은 동일해집니다.