⬡ 원의 방정식 ⬡

⇒아마 도형 문제 중에 가장 많은 비율을 차지하는게 원 일거야
유형도 엄청 많거던 그만큼 재밌는 것도 많아ㅎㅎ

(1) 원의 방정식 표준형과 일반형

⇒ 직선의 방정식의 핵심요소는 ≪점≫과 ≪기울기≫였지?
원의 핵심 요소는 ≪원의중심≫과 ≪반지름≫이야
즉, 원 문제는 원의중심과 반지름으로 거의 모든 문제를 푼다고 생각하면 돼

원의 방정식을 나타낼 때, 원의중심 $(a,\ b)$과 반지름(r)을 보여주는 식이
표준형이야 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

그에 반해 원의 핵심요소를 모를 때, 즉, 원의 중심과 반지름을 모를때
쓰는 식이 일반형이야
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이지 당연 암기해야지

≪ 일반형에서 원의 중심과 반지름 구하기 ≫

⇒원의 중심 구하는 것은 마치 2차 함수에서 꼭지점의 x좌표
구하는거랑 비슷해
$y=ax^2+bx+c$에서 꼭지점의 x좌표는 $\dfrac{\text{두근의 합}}{2} = -\dfrac{b}{2a}$였지?
원의 방정식에서도 중심좌표는 $(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{b}{2})$가 돼
≪두근의합의반≫이라고 외우는게 편해
실제 반지름을 구하면 $r=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c}$ 인데 이건
$r=\sqrt{(\text{중심의 }x\text{좌표})^2+(\text{중심의 }y\text{좌표})^2-\text{상수항}}$ 이렇게 돼ㅎ

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$에서

① 원의 중심 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$

② 반지름 $= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$

(원의 중심들의 제곱의합 − 상수항)

③원의 성립 조건 $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$

$ex)$ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$의 중심과 반지름은?

$\Rightarrow$중심 좌표 = 두근의 합의 반이니깐 $(1,\ -2)$가 되지

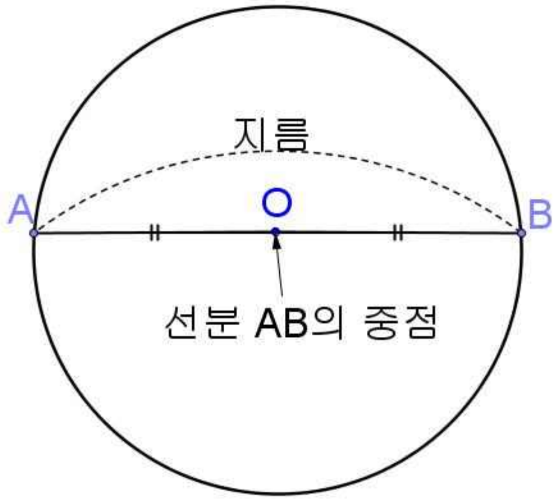
반지름 $r = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-6)} = \sqrt{11}$ 간단하지ㅎㅎ

(2) 원의 방정식 구하기

$$\begin{cases} \text{① 원의 중심과 반지름을 알 때 : 표준형} \\ \text{② 지나는 세 점을 알 때 : 일반형} \\ \text{③ 지름의 양 끝점을 알 때 : 두점의 중점 = 원의중심} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{두점 사이의 거리 = 지름} \end{cases}$$

⇒ 핵심 요소 (중심, 반지름) 알면 당연히 공식으로
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 하면 되지 하지만, 그 이외의 조건을 알 때는
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이라 놓고 푸는게 일반적이야

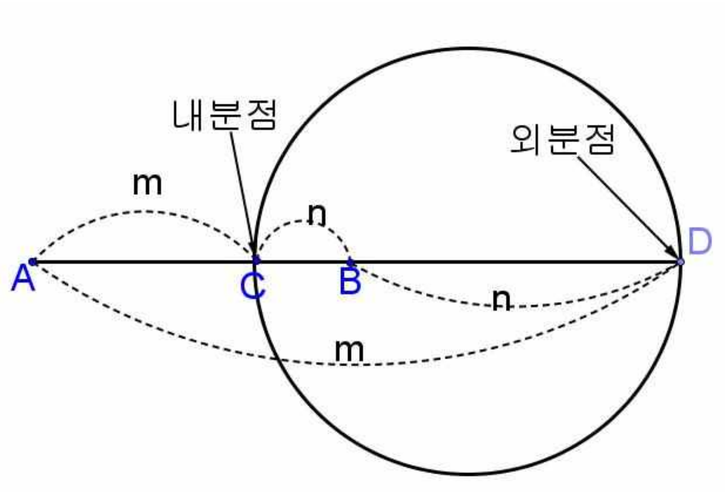
단, 특이 하게도 지름의 양 끝점을 갈켜주는 경우가 있는데 조금만
생각해보면 두 점의 중점이 원의 중점이고, 두 점 사이의 거리가
원의 지름이 된다는 것을 알 수 있어. 이걸 이용하면 쉽게 풀 수 있지 ㅎ



지름의 양끝점 A, B라 하면 $\begin{cases} \text{원의 중심 : } \overline{AB}\text{ 의 중점} \\ \text{원의 반지름 : } \dfrac{\overline{AB}\text{ 의 길이}}{2} \end{cases}$

(3) 아폴로니우스의 원

⇒ 두 정점이 있고 두 정점 사이로부터의 거리의 비가 $m:n$으로 일정한 점을 다 모아 놓으면 원이 되거던 이 원을 "아폴로니우스의 원"이라고 해 공간에서는 아폴리니우스의 구라고도 해 우린 평면 상태에서만 배우니깐 원인거지ㅎ
아폴로니우스의 원의 방정식은 두 정점을
≪ $m:n$으로 내분하는점 과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양끝점 ≫
으로 하는원이 돼 암기 하도록!!!



⇒ 결국 아폴로니우스의 원 문제는 내분점과 외분점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하는거니깐
양 끝점을 알 때 쓰는 이론들을 그대로 적용하면 돼

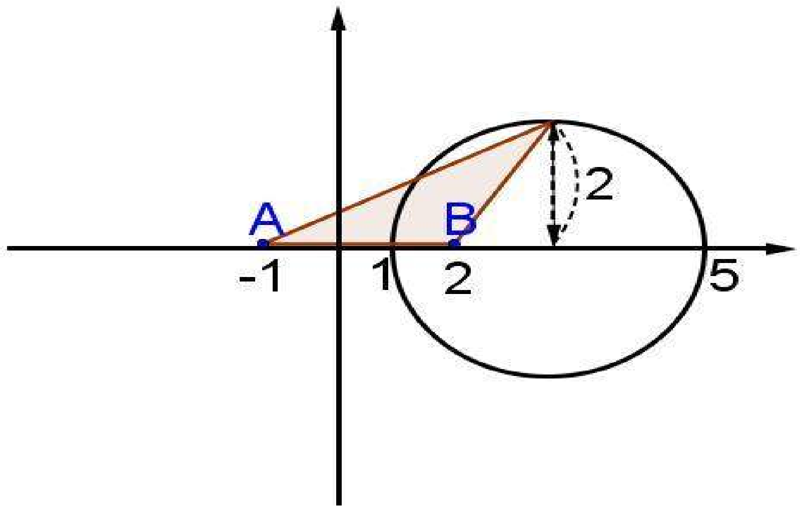
①원의 중심은 = 양 끝점의 중점,

② 양 끝점 사이의 거리 = 지름

$ex)$ 두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$에서의 거리의 비가 $2:1$ 인 점을 P라 할 때, 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

$\Rightarrow$거리의 비가 $2:1$로 일정한 점P의 자취는 아폴로니우스의 원이돼
$2:1$로 내분점은 $(1,\ 0)$, 외분점은 $(5,\ 0)$인데 이 두 점을 지름의 양끝으로 하는 원이니깐 중심은$\left(\frac{1+5}{2},\ 0\right) = (3,\ 0)$,
지금이 $5-1=4$이니깐 반지름은 2인 원이되네

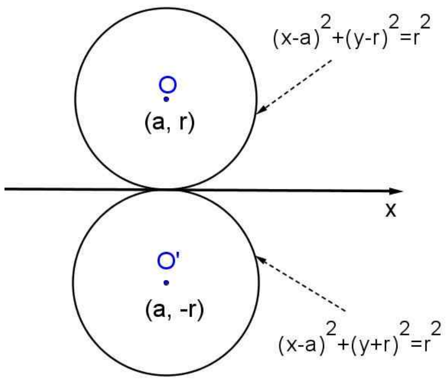
$\overline{AB}$의 길이는 일정한 상태에서 높이가 최대가 되면 넓이가 최대가 되겠지
그림보면 높이가 반지름일 때 최대가 되니깐 $S=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$



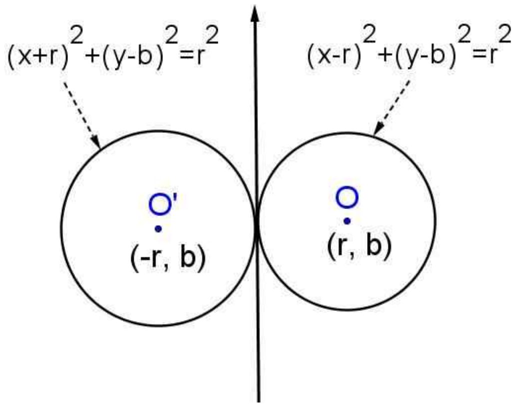
(4) 축에 접하는 원의 방정식

$\Rightarrow x$축에 접하는 원은 중심의 $|y$좌표$|$ = 반지름이고,
y축에 접하는 원은 중심의 $|x$좌표$|$ = 반지름
x축, y축 동시에 접하는 원은 중심의 x좌표, y좌표가 전부 반지름이랑 절대값이 같지(원의 중심이 $y=x$, $y=-x$ 위에 존재해)

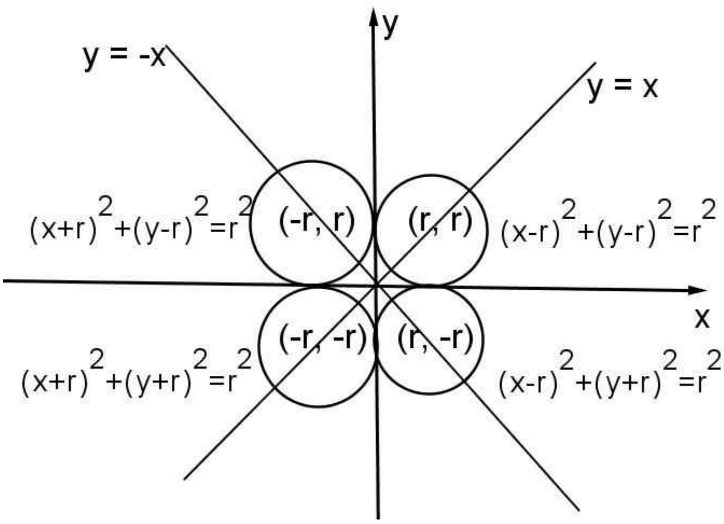
우선 그림을 보면서 이해하는게 나을것 같애



≪ x축에 접하는 원 ≫



≪ y축에 접하는 원 ≫



≪ x축, y축 모두 접하는 원 ≫

$\Rightarrow$ 여기서 특히 x축, y축 동시에 접하는 원의 중심은
$y=x$ 와 $y=-x$ 위에 있다는것 엄청 중요해

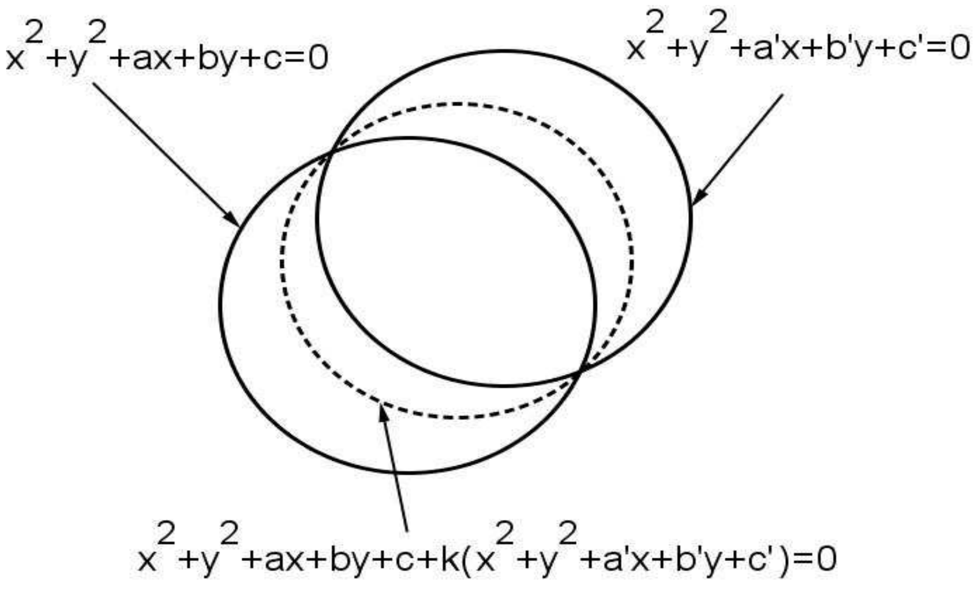
$ex)$ x축, y축 동시에 접하는 원의 중심이 $y=x^2$ 위에 있을 때,
원의 중심의 좌표를 구하시오

$\Rightarrow$ $y=x$ 와 $y=x^2$ 교점과 $y=-x$, $y=x^2$ 의 교점위에 원의 중심이 존재하므로 연립방정식풀어서 나온 근 $(1,\ 1)$과 $(-1,\ -1)$이
원의 중심이 되는거야

(5) 두 원의 교점을 지나는 원, 직선

① 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

$\Rightarrow$두 직선의 교점을 지나는 직선 기억나지?? 그 때 어떻게 했드라
한 직선의 식을 k로 묶고 k에 관계없는 항등식으로 나타냈지
두 원의 교점을 지나는 도형도 마찬가지야

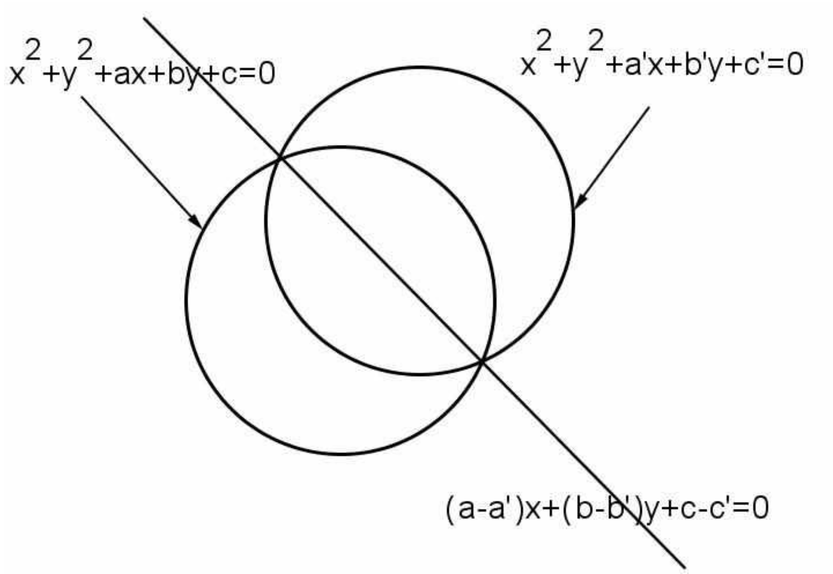


≪ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 ≫

$$x^2+y^2+ax+by+c+k\,(\,x^2+y^2+a'x+b'y+c'\,)=0$$

② 두 원의 교점을 지나는 직선(공통현)의 방정식

$\Rightarrow$ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식
$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ 에서
$k=-1$ 일 때, 즉 그냥 하나의 원의 방정식에서 다른 원의 방정식을 빼버리면 ≪ 두 원의 교점을 지나는 직선(공통현)의 방정식 ≫이 돼



≪ 두 원의 공통현의 방정식 ≫

$\Rightarrow (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$

(6) 두 원의 위치 관계

⇒원에 관련된 위치관계는 반지름(r)과 중심 사이의 거리(d)의 대소로 파악해

① 두 원이 외부에 있다 : $r+r' < d$ (공통접선의 길이 4개 (외접선2, 내접선2))

② 외접한다 : $r+r' = d$ (공통 접선의 길이 3개 (외접선2, 내접선1))

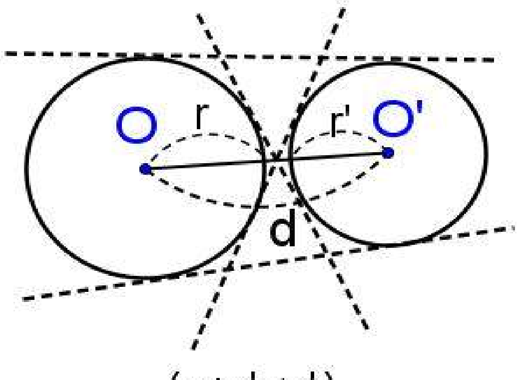
③ 두 점에서 만난다 : $|r-r'| < d < r+r'$ (공통접선의 길이 2개(외접선 만))

④ 내접 한다 : $|r-r'| = d$ (공통 접선의 길이 1개)

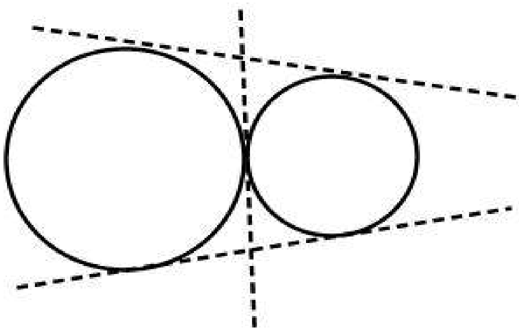
⑤ 한원이 다른원의 내부에 있다 : $|r-r'| > d$ (공통접선 없어)

$cf)$ ≪두 원이 만나지 않는다≫ 즉, 교점이 없다면

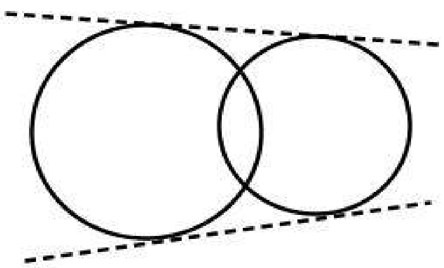
⇒ ① 외부에 있거나 ⑤ 내부에 있는거지 두가지 라는거 꼭 기억해!!!



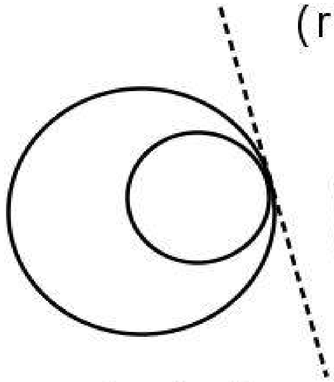
(r+r'<d)



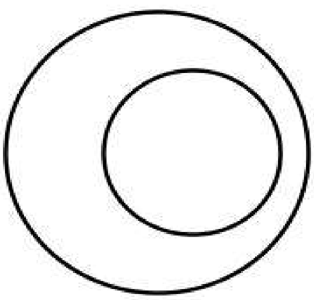
(r+r'=d)



(r-r'<d<r+r')



(r-r'=d)



(r-r'>d)

(7) 원과 직선의 위치 관계

$\Rightarrow$ 원과 직선은 만나지 않는 경우, 한 점에서 만나는 경우 (접한다), 두 점에서 만나는 경우 이렇게 세 종류가 있어

원의 방정식도 2차식이고 직선의 방정식과 연립해도 어차피 2차식이 되거던 위치 관계는 교점의 개수로도 파악이 되니깐 이 $\ll$ 연립한 2차 방정식의 근의 개수 $\gg$ 로도 위치 관계를 얘기 할 수 있어

즉, 포물선과 직선처럼 원의 방정식과 직선의 방정식을 $\ll$ 연립한 2차 방정식의 판별식 $D \gg$ 로도 위치관계를 설명 할 수 있다는 거야
이게 일반적인 2차 곡선과 직선과의 위치 관계 해결 방식이야

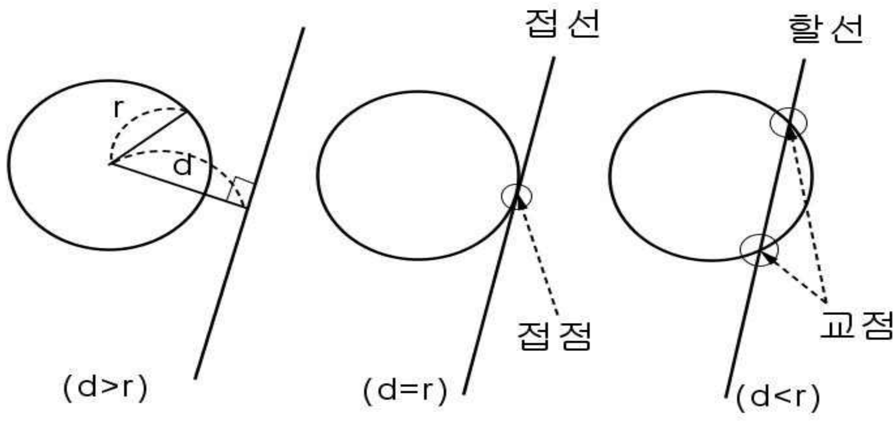
그러나 원은 특이하게도 $\ll$ 직선과 원의 중심과의 거리$(d) \gg$ 와 $\ll$ 반지름$(r) \gg$ 만으로 위치 관계가 설명이 돼 아주 특이한 케이스지ㅎㅎ

이 방식이 원에서 만큼은 훨씬 편하기 때문에 앞으로 원과의 위치 관계는 d 랑 r 만 가지고 풀면 돼!!!

① $r < d$: 직선이 원 외부에 있다 (만나지 않는다)

② $r = d$: 직선과 원이 접한다 (교점1개)

③ $r > d$: 직선과 원이 두 점에서 만난다 (교점2개)



$cf.$) 두번째 그림에서 접하는경우 그 교점을 $\ll$ 접점 $\gg$ 이라고 하고 그 때의 직선을 $\ll$ 접선 $\gg$ 이라고 해

(8) 원의 접선의 방정식

⇒앞 서 원과 직선의 위치 관계를 배웠지? 거기서 원과 직선이 접하는 경우를 특별 취급한거야
접 할때의 직선을 접선이라고 하는데 그직선의 방정식을어떻게 구할까? 하는문제야ㅎ

우선 알아야 할 게 있어 접선도 직선이지?? 직선에서 중요한 게 뭐였더라?? 그치!! ≪ 지나는 점 ≫ 과 ≪ 기울기 ≫ 지!!
결국 접선의 방정식 문제는 지나는 점과 기울기를 찾는 문제가 되는거야

≪ 접선의 방정식 공식 ≫

⇒ 접점이 주어질 때와 기울기가 주어질 때로 나눠서 공식이 분류돼

① 접점 $(x_1,\ y_1)$이 주어진 경우

⇒ 우선 접점은 그 곡선위에 있으니깐 그 점을 곡선식에 대입하면 만족한다는 것을 꼭 알아야 돼 그리고,
모든 2차 곡선(원과 포물선 포함)은 접점이 주어질때
접선의 방정식이 공통적으로 적용되는 공식이 있어

곡선위의 접점을 $(x_1,\ y_1)$이라 할 때,

$$x^2 \Rightarrow x_1 x, \quad x \Rightarrow \frac{x+x_1}{2}, \quad y^2 \Rightarrow y_1 y, \quad y \Rightarrow \frac{y+y_1}{2}$$

$$(x-\alpha)^2 \Rightarrow (x_1-\alpha)(x-\alpha), \quad (x-\alpha) \Rightarrow \frac{(x-\alpha)+(x_1-\alpha)}{2}$$

$$(y-\beta)^2 \Rightarrow (y_1-\beta)(y-\beta), \quad (y-\beta) \Rightarrow \frac{(y-\beta)+(y_1-\beta)}{2}$$

$i)$ $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1 x + y_1 y = r^2, \quad x_1^2+y_1^2=r^2$$

$ii)$ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(y_1-\beta)(y-\beta)=r^2, \quad (x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2=r^2$$

$ex1)$ $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(3, -4)$에서의 접선의 방정식을 구하시오

$\Rightarrow 3x - 4y = 25$

$ex2)$ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ 위의 점 $(5, 1)$에서의 접선의 방정식은?

$\Rightarrow (5-2)(x-2) + (1+3)(y+3) = 25$
$3x - 6 + 4y + 12 = 25, \quad 3x + 4y = 19$

$ex3)$ 포물선 $y = x^2 + 3x + 1$ 위의 점 $(1, 5)$에서의 접선의 방정식은?

$\Rightarrow \frac{y+5}{2} = 1x + 3\times \frac{x+1}{2} + 1$ 에서 $y = 5x$

$ex4)$ 포물선 $y = (x-3)^2 + 4$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 방정식은?

$\Rightarrow \frac{y+5}{2} = (2-3)(x-3) + 4$ 에서 $y = -2x + 9$

② 기울기 m이 주어질 때,

$i)$ 원 $x^2 + y^2 = r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식

$\Rightarrow \ll y = mx \pm r\sqrt{m^2+1} \gg$

$ii)$ 원 $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식

$\Rightarrow \ll y - \beta = m(x-\alpha) \pm r\sqrt{m^2+1} \gg$

$\Rightarrow i)$번 공식은 중심이 원점일 때고 $ii)$번 공식은 중심이 (α, β)일
때인데, “중심을 평행이동 시킨 원의 접선의 방정식은
접선도 같이 평행이동 된다”라는 이론이 있어
그래서 위와 같은 공식이 되지ㅎ

$ex)$ $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식은?

$\Rightarrow\ y\ =\ 2x\ \pm\ 3\sqrt{2^2+1}\ =\ 2x\ \pm\ 3\sqrt{5}$

$ex)$ $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ 에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은?

$\Rightarrow (y+3)=3(x-2)\pm 5\sqrt{3^2+1}$, $y=3x-9\pm 5\sqrt{10}$

③ 접선의 방정식 구하기 일반적인 해법
$\Rightarrow$ 만일 접점과 접선의 기울기가 주어지지안는다면 공식사용이
불가능하지 그럴때는 일반적으로 푸는 방법이 있어
원과 직선의 위치관계에서 접할 때,

d(원의 중심과 직선사이의 거리) $=r$ (반지름) 이라고 했지??

이걸 이용하는거야 직선의 방정식을 세우고 $d=r$ 이용하면 끝!!

$i)$ 직선의 방정식 세우기

문제에서는 분명히 직선이 지나는 점이나 기울기가 주어질거야
지나는 점이 (3, 2)다 그러면 $y=m(x-3)+2$가 되고
기울기가 2이다 그러면 $y=2x+b$라고 세우면돼
사실 기울기를 가르쳐 주면 그냥 공식 써도 되긴 해ㅎ

$ii)$ $d=r$ 을 이용해서 직선의 방정식의 미지수 구하기

$\Rightarrow$ 이 방법은 어떤형태의문제라도 다 풀수있는
마치 근의 공식 같은 방법이야
그니깐 복잡하다!! 막혔다!!하면 주어진 조건으로 직선의 방정식
세우고 $d=r$ 이용하면 무조건 풀 수 있어

접선의 방정식 공식 외우기 싫으면 이렇게해도돼ㅎ

$ex)$ 원 $x^2+y^2=5$ 밖의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은?

$\Rightarrow$ 지금 주어진 조건은 접점이 아니야 그래서 공식 사용 못해
이렇게 곡선밖의 한점에서 그은 접선의 방정식은 어차피
접선의 방정식이 이 점을 지나니깐 한점을 지나는 직선의 방정식
$y=m(x-1)+3$ 이라 놓고 $d=r$ 이용하면돼

d는 이 직선과 원의 중심$(0,\ 0)$ 사이의 거리니깐 먼저 직선을
$mx-y-m+3=0$이라 놓고 공식쓰면
$d=\dfrac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$ 이 되고 이게 $\sqrt{5}\ (=r)$ 이랑 같겠지
$\dfrac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$에서 양변 제곱하면 $\dfrac{(m-3)^2}{m^2+1}=5$
이걸 풀어서 쓰면 $m=\dfrac{1}{2},\ \ -2$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}(x-1)+3,\quad y=-2(x-1)+3$

$$\text{접선의방정식}\begin{cases}\text{접점과 기울기가 주어질 때 : 공식}\\[2ex] \text{일반적풀이}\Rightarrow\begin{cases}\text{① 직선의방정식세우기 (점, 기울기)}\\ \text{②}\ d=r\end{cases}\end{cases}$$

(9) 원 문제 응용(길이문제)

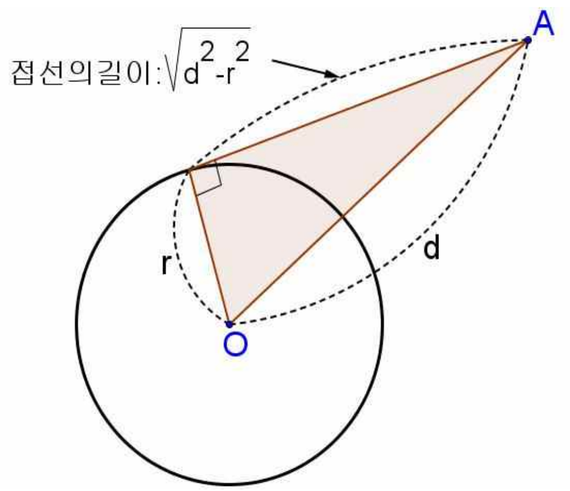
⇒ 원의 구조는 중심과 반지름으로 엄청 간단 해 보이는데 문제 유형은 엄청 많지ㅠㅠ 원 문제를 풀 때는 기본 마인드가 있어야 해
숱하게 많은 원 문제도 그 풀이를 분석해보면 삼각형으로 푸는 문제가 많아 그것도 100% 직각삼각형!!!

그래서 너네가 알아야 할 기본마인드는
≪원 문제는!!!≫ ≪보조선을 그어서!!!≫ ≪직각삼각형으로푼다!!≫

≪보조선≫도 막 긋는게 아니라 원의 중심부터 시작해서
≪원의 중심끼리≫ ≪현에 수직≫ ≪원의 교점(원주)≫이 세가지 밖에없어 이것들을 연결해서 직각삼각형만 만들고 피타고라스정리나 삼각비로 길이를 구하면 돼ㅎ

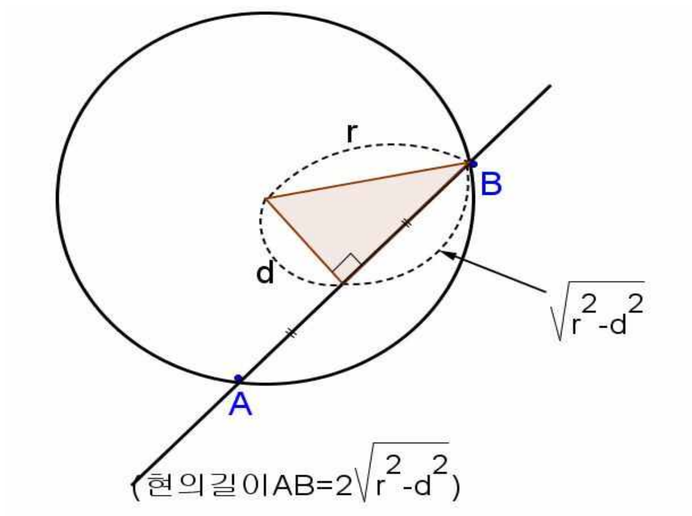
(원문제)⇒(보조선)	원의중심끼리 현에 수직 교점	⇒	직각 삼각형 작도!!

① 곡선밖의 한점에서 원에 그은 접선의 길이



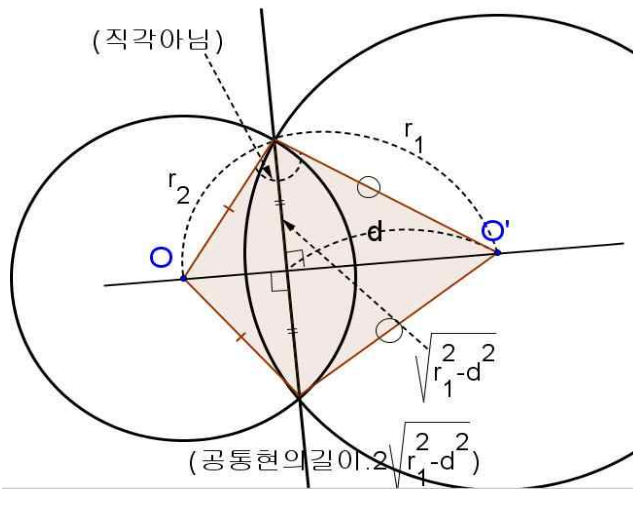
⇒직각 삼각형 작도지ㅎ 피타고라스 정리 이용하면
접선의 길이 $= \sqrt{d^2 - r^2}$ (d : 곡선밖의 한점과 원의 중심까지의 거리)

② 원과 직선의 두 교점 사이(현)의 길이



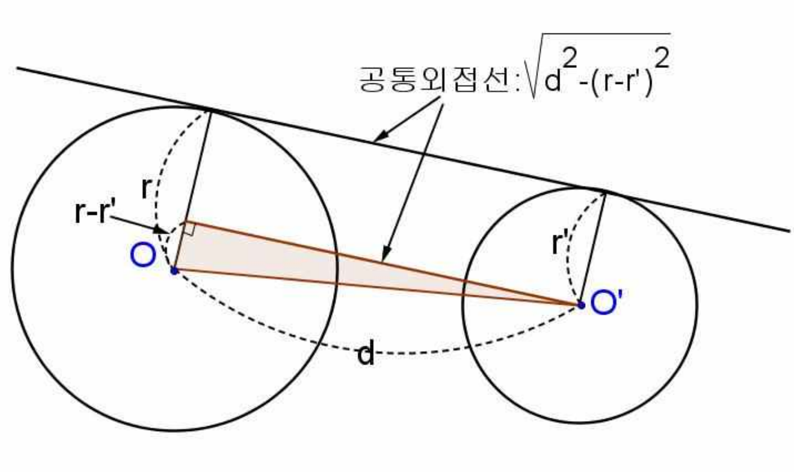
⇒ 이것도 직각 삼각형 작도지
현의 길이 $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$ (d : 원의 중심과 현 사이의 거리)

③ 두 원의 교점을 지나는 공통현의 길이



⇒ 위의 그림을 보면 공통현과 두 원의 중점을 연결한 선분은 서로 수직이 돼 공통현의 길이 : $2\sqrt{r_1^2 - d^2}$
r_1 : 원 O' 의 반지름, d : O'의 중심과 공통현 사이의 거리

④ 공통 외접선의 길이

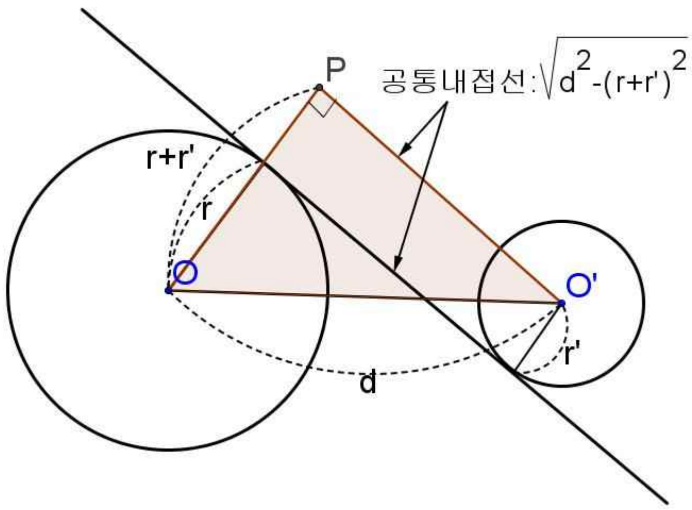


⇒ 역시 직각삼각형 작도야ㅎ
공통 외접선의길이 : $\sqrt{d^2 - (r - r')^2}$

r : 큰원의 반지름, r' : 작은 원의 반지름,

d : 두원의 중심 사이의 거리

⑤ 공통 내접선의 길이



⇒ 역시 직각 삼각형 작도이고
공통 내접선의 길이 : $\sqrt{d^2-(r+r')^2}$ (외접원과 기호 동일)

⑥ 원 위의 점과의 최단거리 최장거리

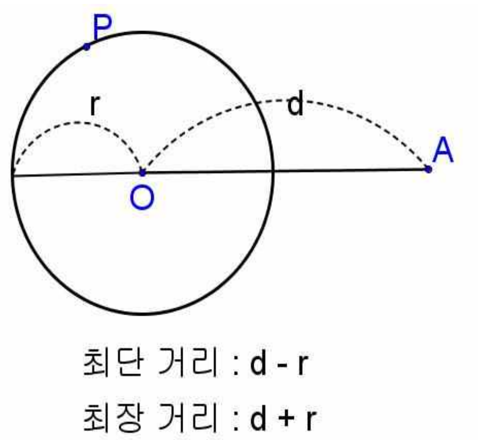
$\Rightarrow$ 이것도 결국 d와 r의 관계로 모든게 설명돼ㅎ

$i)$ 원 위를 움직이는점P와 점A의 최단거리 : $d-r$, 최장거리 : $d+r$

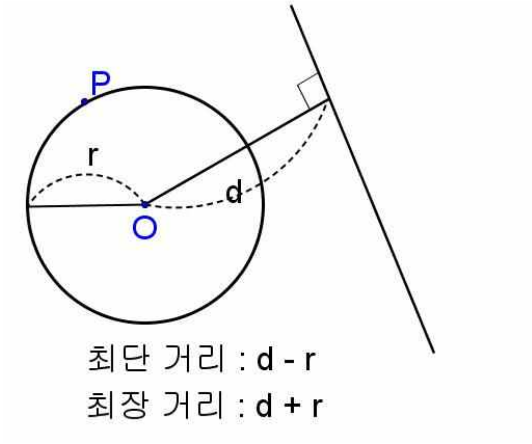
$ii)$원 위를 움직이는점P와 직선l 과의 최단거리 : $d-r$, 최장거리 : $d+r$

$iii)$두 원 위를 움직이는 점P와 점Q의 최단 거리 : $d+r-r'$,

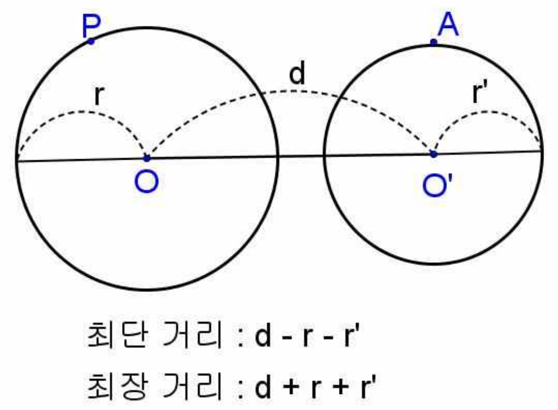
최장거리 : $d+r+r'$



(i) 원 외부의 점 A와의 거리



(ii) 원 외부의 직선과의 거리

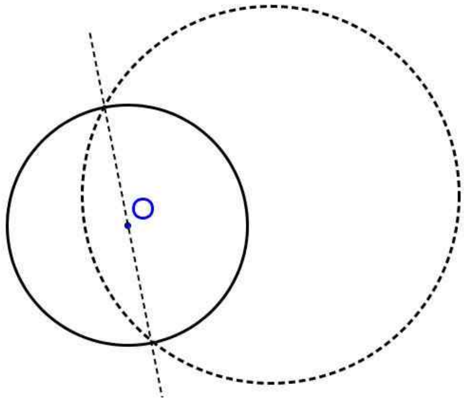


(iii) 두 원 사이의 거리

⑦ 특이한 상황의 이해

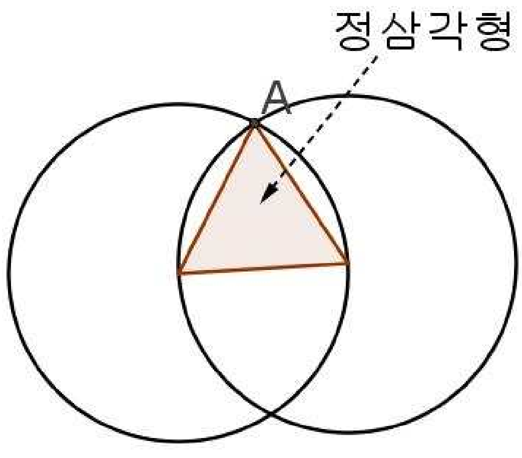
$i)$ 원이 원 둘레의 길이를 이등분 한다

$\Rightarrow$ 공통 현이 원의 중심을 지난다!!

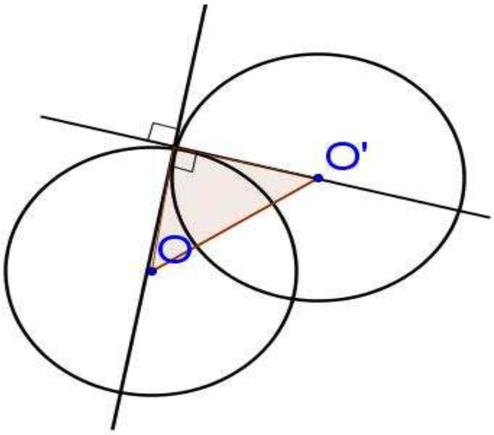


$ii)$ 반지름이 동일한 두원이 서로 원의 중심을 지난다

$\Rightarrow$ 두 원의 중심과 교점으로 이루어진 삼각형은 정삼각형이다



$iii)$두 원의 교점에서 그은 두 접선이 서로 수직일때
두 원은 수직으로 만난다(직교한다) 라고한다



(직교: 접선이 서로 수직)